

**Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном**

- 1) Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
- 2) \* Алгебры непрерывных на компактах функций, замкнутые относительно равномерной сходимости. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
- 3) Пространства  $L_p$ . Неравенства Гёльдера и Минковского. Полнота пространства  $L_p$ . Скалярное произведение в пространстве  $L_2$ .
- 4) Приближение функций в  $L_1$  и  $L_2$  ступенчатыми и бесконечно гладкими.

**Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция**

- 5) Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
- 6) Абсолютно непрерывные функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница. Обобщённое интегрирование по частям.
- 7) Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
- 8) Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
- 9) Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

**Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость**

- 10) Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле. Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
- 11) Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 12) Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 13) Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- 14) Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
- 15) Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
- 16) \* Явный пример непрерывной  $2\pi$ -периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
- 17) Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей. Формула дополнения для бета-функции.

**Ряд Фурье в пространстве  $L_2$**

- 18) Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в  $L_2$ .
- 19) Полные системы в пространстве  $L_2$ . Полнота тригонометрической системы в  $L_2[-\pi, \pi]$ .
- 20) Равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из  $L_2[-\pi, \pi]$  по ортогональным системам.

**Интеграл Фурье и преобразование Фурье**

- 21) Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
- 22) Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
- 23) Признаки сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции: признак Дини и признак Дирихле.
- 24) Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
- 25) Пространство  $\mathcal{S}$ , его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .
- 26) Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве  $\mathcal{S}$ , продолжение преобразования Фурье на  $L_2$ .
- 27) Явление Гиббса для представления  $\operatorname{sgn} x$  интегралом Фурье.
- 28) Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
- 29) Достаточные условия для справедливости формулы обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных.
- 30) Свёртка функций из  $L_1$  и преобразование Фурье.

## Банаховы пространства

- 31) Нормированные векторные пространства, банаховы пространства. Полнота пространства  $C[a, b]$ .
- 32) Теорема Бэра в банаховом пространстве.
- 33) Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
- 34) Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
- 35) Расходимость рядов Фурье непрерывных  $2\pi$ -периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
- 36) Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
- 37) Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству.
- 38) Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
- 39)  $\varepsilon$ -сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
- 40) Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

## Гильбертовы пространства

- 41) Евклидовы и гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
- 42) Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
- 43) Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
- 44) Описание двойственного к гильбертову пространству.

## \* Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств

- 45) \* Теорема Цермело и лемма Цорна.
- 46) \* Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
- 47) \* Теорема Тихонова о произведении компактов.
- 48) \*-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в \*-слабой топологии.
- 49) \* Теорема Рисса о двойственном пространстве к  $C[a, b]$ .

## Распределения (обобщённые функции)

- 50) Пространство  $\mathcal{E}$  и топология в нём, его полнота.
- 51) Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . Пространство  $\mathcal{E}'$  распределений с компактным носителем.
- 52) Описание элементов  $\mathcal{E}'$  через интегрирование производных по отрезку.
- 53) Пространство  $\mathcal{D}$  и определение сходимости в нём.
- 54) Пространство  $\mathcal{D}'$  распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
- 55) Топология и сходимость в пространстве  $\mathcal{D}'$ , сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
- 56) Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ .
- 57) Умножение распределения в  $\mathcal{D}'$  на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ .
- 58) Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из  $\mathcal{D}'$ .
- 59) Пространство  $\mathcal{S}'$  обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из  $\mathcal{S}'$ , преобразование Фурье дельта-функции.
- 60) \* Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа*. [rkarasev.ru/common/upload/an\\_explanations.pdf](http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf), 2019.
- [2] Г. Ч. Харди, В. В. Рогозинский. *Ряды Фурье*. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Физматлит, 2006.