

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Гармонический анализ»

2 курс, 4 семестр, 2021-22 уч.г.

ФУПМ, поток Гусева Н.А.

1. Системы подмножеств. Сигма-алгебры и их свойства.
2. Счётная аддитивность клеточной меры.
3. Измеримость множеств по Лебегу. Измеримость клеточных множеств.
4. Пример Витали множества, неизмеримого по Лебегу.
5. Теорема Каратеодори.
6. Теорема Дынкина.
7. Внутренняя и внешняя регулярность конечной борелевской меры.
8. Борелевские функции. Измеримость функций по Лебегу.
9. Интеграл Лебега для неотрицательной функции. Теорема Леви (о монотонной сходимости).
10. Лемма Фату.
11. Интеграл Лебега для знакопеременной функции. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
12. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
13. Неравенства Гёльдера и Минковского.
14. Полнота пространств  $L^p(\mathbb{R})$  при  $p \in [1, +\infty)$ .
15. Лемма Витали о покрытии.
16. Теорема Витали о тонком покрытии.
17. Точки Лебега интегрируемой функции.
18. Теоремы Тонелли и Фубини.
19. Приближение интегрируемых функций гладкими.
20. Сходимость почти всюду, по мере и в среднем, связи между ними.
21. Теорема Рисса о выделении подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
22. Теоремы Егорова и Лузина.
23. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость собственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.
24. Равномерная сходимость несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле.
25. Непрерывность и интегрируемость несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.

26. Дифференцирование несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.
27. Теорема (лемма) Римана-Лебега (об осцилляции). Стремление к нулю коэффициентов Фурье интегрируемой по Лебегу функции.
28. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.
29. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.
30. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.
31. Достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье.
32. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Фейера.
33. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
34. Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.
35. Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля.
36. Теорема Рисса-Фишера.
37. Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь.
38. Полнота тригонометрической системы в различных пространствах.
39. Полнота системы многочленов в различных пространствах.
40. Достаточные условия сходимости интеграла Фурье в точке.
41. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
42. Пространства  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  и  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Дифференцирование и другие действия с обобщёнными функциями.
43. Преобразование Фурье в пространствах  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  и  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .  $\delta$ -функция и её преобразование Фурье.
44. Теорема Котельникова.