

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Гармонический анализ»,
весенний семестр 2020–2021 учебного года, ЛФИ(ФОПФ)

Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

- 1) Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
- 2) Приближение непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими многочленами.
- 3) * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
- 4) Пространства L_p . Неравенства Гёльдера и Минковского.
- 5) Полнота пространства L_p .
- 6) Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.

Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

- 7) Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
- 8) Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
- 9) Представление абсолютно непрерывной функции в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.
- 10) Существование производной почти всюду у абсолютно непрерывной функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница.
- 11) Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных функций и обобщённое интегрирование по частям.
- 12) Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
- 13) Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
- 14) Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

Ряд Фурье в пространстве L_2

- 15) Скалярное произведение в пространстве L_2 , неравенство Коши–Буняковского.
- 16) Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2 .
- 17) Полные системы в пространстве L_2 . Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.
- 18) Равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ по ортогональным системам.

Тригонометрический ряд Фурье и его сходимости

- 19) Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
- 20) Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
- 21) Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 22) Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 23) Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- 24) Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
- 25) Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
- 26) Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей. Формула дополнения для бета-функции.

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

- 27) Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
- 28) Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
- 29) Принцип локализации для интеграла Фурье.
- 30) Признаки Дини, Липшица и Дирихле сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции.
- 31) Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
- 32) Пространство \mathcal{S} , его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье как отображения $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.
- 33) Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве \mathcal{S} .
- 34) Продолжение преобразования Фурье на пространство L_2 .
- 35) Явление Гиббса для представления $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье.
- 36) Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
- 37) Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье.
- 38) Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с достаточным количеством непрерывных частных производных.
- 39) Свёртка функций из L_1 и преобразование Фурье.

Банаховы пространства

- 40) Нормированные векторные пространства и банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$.
- 41) Теорема Бэра в банаховом пространстве.
- 42) Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
- 43) Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
- 44) Расходимость рядов Фурье непрерывных 2π -периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
- 45) * Явный пример непрерывной 2π -периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
- 46) Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
- 47) Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству. Его полнота и норма проекции на факторпространство.
- 48) Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
- 49) ε -сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
- 50) Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

Гильбертовы пространства

- 51) Гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
- 52) Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
- 53) Изометрии гильбертовых пространств и описание с точностью до изометрии гильбертовых пространств, имеющих счётную полную систему.
- 54) Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
- 55) Описание двойственного к гильбертову пространству.

* Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств

- 56) * Теорема Цермело и лемма Цорна.
- 57) * Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
- 58) * Теорема Тихонова о произведении компактов.
- 59) *-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в *-слабой топологии.
- 60) * Теорема Хана о разложении меры со знаком.
- 61) * Теорема Радона–Никодима о плотности абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) меры.
- 62) * Теорема Рисса о двойственном пространстве к $C[a, b]$.

Распределения (обобщённые функции)

- 63) Пространство \mathcal{E} и топология в нём, его полнота.
- 64) Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Пространство \mathcal{E}' распределений с компактным носителем.
- 65) Описание элементов \mathcal{E}' через интегрирование производных по отрезку.
- 66) Пространство \mathcal{D} и определение сходимости в нём.
- 67) Пространство \mathcal{D}' распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
- 68) Топология и сходимость в пространстве \mathcal{D}' , сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
- 69) Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$.
- 70) Умножение распределения в \mathcal{D}' на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$.
- 71) Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из \mathcal{D}' .
- 72) Пространство \mathcal{S}' обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из \mathcal{S}' , преобразование Фурье дельта-функции.
- 73) * Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа*. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf, 2019.
- [2] Г. Ч. Харди, В. В. Рогозинский. *Ряды Фурье*. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Физматлит, 2006.