

Экзаменационная программа
по курсу «Гармонический анализ»
ФИВТ, 2021-22 уч.г.

Пространства L_p ($1 \leq p < \infty$)

1. Неравенства Гельдера и Минковского. Нормированное пространство $L_p(E)$. Взаимные вложения пространств $L_p(E)$ при различных p .
2. *¹ Полнота пространств $L_p(E)$.
3. Приближение функций из $L_p(E)$ простыми и бесконечно гладкими финитными.
4. Теорема о непрерывности сдвига. Лемма Римана об осцилляции.

Неопределенный интеграл Лебега

5. * Лемма Витали о покрытиях. Теорема о дифференцируемости п.в. монотонной функции.
6. Производная неопределенного интеграла.
7. Функции ограниченной вариации, их дифференцируемость. Абсолютно непрерывные функции. Свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега, абсолютная непрерывность неопределенного интеграла.
8. Постоянство абсолютно непрерывной функции, имеющей п.в. равную нулю производную. Интеграл от производной. Формула интегрирования по частям.

Ряды Фурье

9. Ряды Фурье по системам $\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, их взаимосвязь. Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле, ее асимптотическое представление. Принцип локализации Римана.
10. Критерий сходимости ряда Фурье. Признак Дини и его следствия.
11. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании ряда Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.
12. Теорема Фейера. Приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.
13. Теорема Стоуна–Вейерштрасса (вещественный случай). Приближение непрерывной функции алгебраическими многочленами.

Ортогональные ряды

14. Ряды Фурье по ортогональным системам. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Единственность коэффициентов разложения.
15. Теорема о связи полноты, базисности и равенства Парсеваля. Теорема Рисса–Фишера.
16. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье. Полнота системы $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространствах $L_p(\mathbb{T})$. Сходимость рядов Фурье в $L_2(\mathbb{T})$, равенство Парсеваля.

Интегралы, зависящие от параметра

17. Теоремы о непрерывности и дифференцировании интеграла по параметру.
18. Равномерная сходимость семейства функций. Теорема о перестановке пределов и следствия из нее (непрерывность и дифференцируемость* равномерного предела).
19. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов: непрерывность, дифференцирование и интегрирование.

¹Вопросы со звездочкой – без доказательства.

20. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Вычисление интеграла Дирихле методом дифференцирования по параметру.
21. * Гамма-функция и бета-функция Эйлера. Формула сведения для бета-функции. Формулы понижения и удвоения для гамма-функции. Формула дополнения для гамма-функции.
22. * Существование почти всюду и интегрируемость свертки функций, интегрируемых на \mathbb{R}^n .

Преобразование Фурье

23. Преобразование Фурье и его свойства. Преобразование Фурье свертки.
24. Преобразование Фурье производной. Производная преобразования Фурье.
25. Интеграл Фурье. Представление частичных интегралов Фурье в виде свертки. Признак Дини сходимости интеграла Фурье. Формула обращения.
26. * Формула обращения при условии интегрируемости преобразования Фурье. Теорема единственности для преобразования Фурье.
27. Пространства D и D' . Дифференцирование обобщенных функций. δ -функция.