

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Гармонический анализ»

2 курс, 4 семестр, ЛФИ

поток Г.Е. Иванова, 2021-2022 уч.г.

1. Неравенство Юнга и неравенство Гельдера. Неравенство Минковского.
2. Нормированное пространство  $L_p(X)$ . Взаимные вложения пространств  $L_p(X)$  при различных  $p$ .
3. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Примеры неэквивалентных норм.
4. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
5. Связь ограниченности и непрерывности линейного оператора. Линейное нормированное пространство линейных непрерывных операторов.
6. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Изометрический изоморфизм между гильбертовым пространством и сопряженным к нему.
- 7\*<sup>1</sup>. Изометрический изоморфизм пространств  $l_p^*$  и  $l_q$  при  $p \in [1, +\infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
8. Ряды Фурье функции  $f \in L_1[-\pi, \pi]$  по стандартной тригонометрической системе и по системе  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , их взаимосвязь.
9. Теорема о приближении функции  $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  линейной комбинацией индикаторных функций клеток по норме  $L_1(\mathbb{R}^n)$ .
10. Теорема о приближении функции  $f \in L_p(X, \mathbb{C})$  линейной комбинацией индикаторных функций клеток по норме  $L_p(X)$ .
11. Теорема Римана об осцилляции.
12. Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле. Принцип локализации для ряда Фурье. Признак Дини сходимости ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке для кусочно-непрерывной функции с кусочно-непрерывной производной.
13. Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье. Теорема о почленном интегрировании ряда Фурье.
14. Теорема о порядке убывания коэффициентов и остатка ряда Фурье.
15. Теорема Фейера.
16. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении функции тригонометрическим и алгебраическим многочленами.
- 17\*. Теорема Вейерштрасса–Стоуна.
18. Полнота стандартной тригонометрической системы в пространстве  $L_p[-\pi, \pi]$ .
19. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Теорема о единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе
20. Теорема о связи базиса, полной системы и сходимости ряда Фурье
21. Ортогональность системы многочленов Лежандра. Теорема о полноте и базисности системы многочленов Лежандра.
22. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье.
- 23\*. Критерий полноты нормированного пространства в терминах сходимости абсолютно сходящихся рядов.
- 24\*. Полнота пространства  $L_p(X)$ .

---

<sup>1</sup>Вопрос со звездочкой может быть задан только с целью повышения оценки с согласия студента

- 25\*. Теорема Рисса-Фишера об изометрическом изоморфизме гильбертова пространства со счетным ортонормированным базисом и пространства  $l_2$ .
- 26\*. Связь замкнутости и полноты системы в унитарном пространстве.
27. Признак Вейерштрасса и критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов.
28. Теоремы о непрерывности собственного и несобственного интегралов по параметру. Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру. Теоремы о дифференцировании собственного и несобственного интегралов по параметру.
29. Эйлеровы интегралы. Формула понижения для гамма-функции и формула сведения для бета-функции.
- 30\*. Формула Стирлинга.
- 31\*. Объем шара в  $\mathbb{R}^n$ .
32. Теорема о сходимости интеграла Фурье для функции одной переменной.
33. Теоремы о преобразовании Фурье производной и производной преобразования Фурье для функции одной переменной.
- 34\*. Теорема о взаимно обратных преобразованиях Фурье для функции нескольких переменных.
35. Теорема о непрерывности преобразования Фурье в пространстве Шварца, формулы обращения для преобразования Фурье в пространстве Шварца.
- 36\*. Теорема Тонелли
- 37\*. Теорема о существовании почти всюду и интегрируемости свертки функций, интегрируемых на  $\mathbb{R}^n$ .
- 38\*. Теорема о преобразовании Фурье свертки.
39. Пространство пробных функций  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  и пространство обобщенных функций  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Регулярные и сингулярные функционалы, сингулярность дельта-функции.
- 40\*. Теорема о взаимно-однозначном соответствии между локально интегрируемыми функциями и регулярными функционалами
41. Корректность определений произведения обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  на бесконечно дифференцируемую и производная обобщенной функции.
42. Пространство Шварца обобщенных функций  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Преобразование Фурье обобщенных функций класса  $S'(\mathbb{R}^n)$ .