

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Гармонический анализ»

2 курс, 4 семестр, ЛФИ, Advanced Physics and Research

поток Г.Е. Иванова, 2019-2020 уч.г.

1. Производная Ли

- (a) Определение производной Ли тензорного поля через его обратный перенос фазовым потоком
- (b) Выражение компонент производной Ли тензорного поля по векторному полю через компоненты этих полей
- (c) Выражение производной Ли для тензорных полей типов $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$
- (d) Производная Ли тензорного произведения двух тензорных полей
- (e) Производная Ли внешнего произведения двух дифференциальных форм
- (f) Коммутативность производной Ли и внешнего дифференциала формы
- (g) Определение внутреннего произведения векторного поля на дифференциальную форму
- (h) Правило Лейбница для внутреннего произведения векторного поля на внешнее произведение двух дифференциальных форм
- (i) Магическое тождество Картана
- (j) Задачи на вычисление скобки Ли векторных полей и производной Ли дифференциальных форм

2. Пространства L_p

- (a) Неравенство Юнга
- (b) Неравенство Гельдера
- (c) Неравенство Минковского
- (d) Нормированное пространство $L_p(X)$
- (e) Взаимные вложения пространств $L_p(X)$ при различных p

3. Ряды Фурье

- (a) Определение ряда Фурье функции $f \in L_1(X)$ по системе ортогональных функций $e_k \in L_\infty(X)$
- (b) Ряды Фурье функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ по стандартной тригонометрической системе и по системе $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, их взаимосвязь
- (c) Теорема о приближении функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ линейной комбинацией индикаторных функций клеток по норме $L_1(\mathbb{R}^n)$
- (d) Теорема о приближении функции $f \in L_p(X, \mathbb{C})$ линейной комбинацией индикаторных функций клеток по норме $L_p(X)$
- (e) Теорема Римана об осцилляции

- (f) Представление частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле
- (g) Принцип локализации для ряда Фурье
- (h) Признак Дини сходимости ряда Фурье
- (i) Сходимость ряда Фурье в точке для кусочно-непрерывной функции с кусочно-непрерывной производной
- (j) Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье
- (k) Теорема о почленном интегрировании ряда Фурье
- (l) Лемма об оценке коэффициентов ряда Фурье для кусочно-непрерывной функции с кусочно-непрерывной производной
- (m) Теорема о порядке убывания коэффициентов и остатка ряда Фурье
- (n) Теорема Фейера
- (o) Первая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении функции тригонометрическим многочленом
- (p) Вторая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении функции алгебраическим многочленом
- (q) *¹ Определение алгебры Стоуна
- (r) * Лемма о том, что модуль функции из алгебры Стоуна принадлежит замыканию этой алгебры
- (s) * Лемма о том, что максимум двух функций из замыкания алгебры Стоуна принадлежит этому замыканию
- (t) * Теорема Вейерштрасса–Стоуна
- (u) Задачи на разложение функции в ряд Фурье по тригонометрической системе и по подсистемам тригонометрической системы с использованием свойств четности; равномерная сходимость ряда Фурье
- (v) Задачи на определение порядка убывания ряда Фурье

4. Ряды Фурье и элементы функционального анализа

- (a) Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве
- (b) * Связь эквивалентности норм и совпадения топологий, индуцированных этими нормами
- (c) Определение полной системы в нормированном пространстве; примеры полных и неполных систем
- (d) Минимальное свойство коэффициентов Фурье
- (e) Теорема о единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе
- (f) Теорема о связи базиса, полной системы и сходимости ряда Фурье
- (g) * Ортогональность системы многочленов Лежандра
- (h) * Теорема о полноте и базисности системы многочленов Лежандра
- (i) Неравенство Бесселя

¹Вопрос со звездочкой может быть задан только с целью повышения оценки с согласия студента

- (j) Равенство Парсеваля
- (k) Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье
- (l) Определение полного метрического пространства; примеры полных и неполных нормированных пространств
- (m) * Критерий полноты нормированного пространства в терминах сходимости абсолютно сходящихся рядов
- (n) * Полнота пространства $L_p(X)$
- (o) * Теорема Рисса-Фишера
- (p) * Связь замкнутости и полноты системы в унитарном пространстве

5. Интегралы, зависящие от параметра

- (a) Определение равномерной сходимости несобственных интегралов
- (b) Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов
- (c) Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов
- (d) Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов
- (e) Задачи на исследование равномерной сходимости несобственных интегралов
- (f) Теорема о непрерывности собственного интеграла по параметру
- (g) Теорема о непрерывности несобственного интеграла по параметру
- (h) Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру
- (i) Теорема о дифференцировании собственного интеграла по параметру
- (j) Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру
- (k) Вычисление интеграла Дирихле методом дифференцирования по параметру
- (l) Вычисление интегралов Лапласа методом дифференцирования по параметру
- (m) Задачи на вычисление интегралов методом дифференцирования по параметру
- (n) Определение гамма-функции и бета-функции Эйлера
- (o) Формула понижения для гамма-функции
- (p) Формула сведения для бета-функции
- (q) * Формула дополнения для гамма-функции
- (r) * Формула Стирлинга
- (s) * Объем шара в \mathbb{R}^n

6. Преобразование Фурье

- (a) Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье для функции одной переменной
- (b) Теорема о сходимости интеграла Фурье для функции одной переменной
- (c) Теорема о преобразовании Фурье производной для функции одной переменной
- (d) Теорема о производной преобразования Фурье для функции одной переменной
- (e) Примеры вычисления преобразования Фурье

- (f) Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье для функции нескольких переменных
- (g) * Лемма о свертке непрерывной функции с функцией гауссовой плотности
- (h) * Теорема о взаимно обратных преобразованиях Фурье для функции нескольких переменных
- (i) Определение пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ и сходимости в нем
- (j) Лемма о вложении $S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ и о связи сходимостей в этих пространствах
- (k) Теорема о непрерывности преобразования Фурье в пространстве Шварца, формулы обращения для преобразования Фурье в пространстве Шварца
- (l) * Теорема Тонелли
- (m) * Теорема о существовании почти всюду и интегрируемости свертки функций, интегрируемых на \mathbb{R}^n
- (n) * Теорема о преобразовании Фурье свертки

7. Обобщенные функции (распределения)

- (a) Определение пространства пробных (основных) функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и сходимости в этом пространстве
- (b) Определение пространства обобщенных функций (распределений) $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и сходимости в этом пространстве
- (c) Теорема о взаимно-однозначном соответствии между локально интегрируемыми функциями и регулярными функционалами
- (d) Сингулярность δ -функции Дирака
- (e) Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую
- (f) Производная обобщенной функции
- (g) Задачи на вычисление пределов, производных и упрощение выражений в \mathcal{D}'
- (h) Пространство Шварца обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$
- (i) Регулярные функционалы в $S'(\mathbb{R}^n)$
- (j) Преобразование Фурье обобщенных функций класса $S'(\mathbb{R}^n)$
- (k) Задачи на вычисление преобразования Фурье обобщенных функций класса $S'(\mathbb{R}^n)$