

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Алгебра и геометрия»

1 курс, 2 семестр

(Поток И. И. Богданова)

1. Кольцо многочленов над полем. Значение многочлена. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД. Основная теорема арифметики для многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу.
2. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона–Кэли (в случае разложимости характеристического многочлена на линейные множители).
5. Аннулирующие многочлены преобразования. Разложение пространства в прямую сумму корневых. Жорданова нормальная форма. Существование жордановой нормальной формы в случае одного собственного значения и в общем случае. Единственность жордановой нормальной формы. Минимальный многочлен линейного преобразования, его связь с жордановой нормальной формой.
6. Билинейные формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса. Симметричные билинейные формы, их матрицы.
7. Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду. Критерий Сильвестра.
8. Полуторалинейные формы в комплексном пространстве. Эрмитовы квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Закон инерции для эрмитовых квадратичных форм.
9. Евклидово и эрмитово пространства. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Неравенство треугольника.
10. Ортонормированные базисы и ортогональные (унитарные) матрицы. Существование ортонормированных базисов. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
11. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Объём параллелепипеда.
12. Связь билинейных (полуторалинейных) форм и линейных преобразований в евклидовом (эрмитовом) пространстве. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его свойства.
13. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования.
14. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Инвариантные подпространства малой размерности для преобразования вещественного пространства. Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
15. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.