ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\textbf{Математический анализ}}$ **Курс** $\boxed{1}$ **Семестр** $\boxed{2}$ **2010–2011 уч. год**

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	повышен.	базовый
Фамилия проверяющего		

Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия экзаменатора		

---

1. ⑥ Функция $z = z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M(0; 0)$ и задана уравнением $-y^2 + x + z = \cos(xz + y)$. Найти первый и второй дифференциал функции z в точке M. Разложить функцию z в окрестности точки M по формуле Тейлора с точностью до $o(x^2 + y^2)$.

---

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0; 0)$ функции:

а) ③ $g(x, y) = \sqrt[5]{3x^5 - 7y^5}$; **б)** ④ $f(x, y) = \cos\sqrt[5]{3x^5 - 7y^5}$.

---

3. ⑤ Найти площадь поверхности вращения вокруг оси Ox кривой: $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

---

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл:

а) ④ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}\,dx$; **б)** ⑥ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \cos\sqrt{x}}{x + 1}\,dx$.

---

5. ③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n + \frac{1}{12n}\right)\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

---

6. ⑤ Последовательность $\{f_n(x)\}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$, если $f_n(x) = \dfrac{n}{e^x}\sin\dfrac{1}{nx}$.

---

7. ④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^3 \operatorname{arctg}[1/(nx)]}{\sqrt{nx^2 + 1}}$.

---

8. ④ Разложить по степеням x функцию $f(x) = x^2 \operatorname{arcctg}\dfrac{2x^2}{\sqrt{1 - 4x^4}}$ и найти радиус сходимости.

9*. ④ Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = [0; +\infty)$ функцию $f(x) = xe^{\cos^2 x}$.

10*. ④ Известно, что $u_n(x) \sim v_n(x)$ при $n \to \infty$, $u_n(x) \geqslant 0$ и $v_n(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$? Доказать или опровергнуть примером.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ **Курс** $\boxed{1}$ **Семестр** $\boxed{2}$ **2010–2011 уч. год**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	повышен.	базовый	Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора		

---

1. ⑥ Функция $z = z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M(0; 1)$ и задана уравнением $y + z = \operatorname{tg}(xyz + x^2)$. Найти первый и второй дифференциал функции z в точке M. Разложить функцию z в окрестности точки M по формуле Тейлора с точностью до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

---

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0; 0)$ функции:

а) ③ $g(x, y) = \sqrt{|xy|} + \ln(1 + |xy|)$; **б)** ④ $f(x, y) = \sin^2\left(\sqrt{|xy|} + \ln(1 + |xy|)\right)$.

---

3. ⑤ Найти длину дуги кривой: $r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$; r, φ – полярные координаты.

---

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{(e^x - \operatorname{ch} x)^\alpha}\,dx$; **б)** ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{\ln^\alpha(1 + \operatorname{sh} x)}\,dx$.

---

5. ③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n - \frac{1}{12n}\right) \arcsin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

---

6. ⑤ Последовательность $\{f_n(x)\}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$, если $f_n(x) = e^x n \operatorname{arctg}\dfrac{x}{n}$.

---

7. ④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[1/(nx^{3/2})]}{\sqrt{nx^2 + 1}}$.

---

8. ④ Разложить по степеням x функцию $f(x) = x^2 \arccos\sqrt{\dfrac{3 - x^2}{6}}$ и найти радиус сходимости.

9*. ④ Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = [0; +\infty)$ функцию $f(x) = 2x \operatorname{ch}(\sin^2 x)$.

10*. ④ Является ли множество $E = \{\sin^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) < x_5^2\}$ в пространстве $\mathbb{R}^5$ а) открытым; б) областью? Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ **Курс** 1 **Семестр** 2 **2010–2011 уч. год**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	повышен.	базовый
Фамилия проверяющего		

Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия экзаменатора		

1. ⑥ Функция $z = z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M(0; 0)$ и задана уравнением $y^2 + z = \exp(yz + x)$. Найти первый и второй дифференциал функции z в точке M. Разложить функцию z в окрестности точки M по формуле Тейлора с точностью до $o(x^2 + y^2)$.

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0; 0)$ функции:

а) ③ $g(x, y) = xy + \sqrt[5]{x^3y^2}$; **б)** ④ $f(x, y) = \cos\left(xy + \sqrt[5]{x^3y^2}\right)$.

3. ⑤ Найти площадь поверхности вращения вокруг оси Ox кривой: $x = e^t \sin 2t$, $y = e^t \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл:

а) ④ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(1 + \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x - \cos x}\, dx$; **б)** ⑥ $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x^4}{(x - \operatorname{th} x)^\alpha}\, dx$.

5. ③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n + \frac{1}{6n}\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

6. ⑤ Последовательность $\{f_n(x)\}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$, если $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\left(e^{1/(nx)} - 1\right)$.

7. ④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2[1 - \cos(1/\sqrt{n + x})]}{\sqrt{nx + 1}}$.

8. ④ Разложить по степеням x функцию $f(x) = x \operatorname{arctg} \dfrac{2 + 3x^2}{2 - 3x^2}$ и найти радиус сходимости.

9*. ④ Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = [0; +\infty)$ функцию $f(x) = xe^{\sin^2 x}$.

10*. ④ Известно, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неравномерно сходится на множестве $E \subset \mathbb{R}$, а последовательность $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает при любом $x \in E$, стремится к нулю при $n \to \infty$, но неравномерно на E. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ не является равномерно сходящимся на E? Доказать или опровергнуть примером.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Математический анализ** **Курс** 1 **Семестр** 2 **2010–2011 уч. год**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	повышен.	базовый
Фамилия проверяющего		

Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия экзаменатора		

---

1. ⑥ Функция $z = z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M(1; 0)$ и задана уравнением $-x^2 + z = \sin(xyz - y^2)$. Найти первый и второй дифференциал функции z в точке M. Разложить функцию z в окрестности точки M по формуле Тейлора с точностью до $o((x-1)^2 + y^2)$.

---

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0; 0)$ функции:

а) ③ $g(x, y) = \sqrt[3]{7x^3 + 8y^3}$; **б)** ④ $f(x, y) = \sin^2\left(\sqrt[3]{7x^3 + 8y^3}\right)$.

---

3. ⑤ Найти длину дуги кривой: $r = \dfrac{a}{\sin^2(\varphi/2)}$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; r, φ — полярные координаты.

---

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{(e^x - \cos x)^\alpha}\, dx$; **б)** ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2 \ln^\alpha(1 + 1/\sqrt{x})}\, dx$.

---

5. ③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n - \frac{1}{6n}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

---

6. ⑤ Последовательность $\{f_n(x)\}$ исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$, если $f_n(x) = (xn)^2 \left(1 - \cos \dfrac{x}{n}\right)$.

---

7. ④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{x^2\sqrt{n + x}}$.

---

8. ④ Разложить по степеням x функцию $f(x) = x \arccos \dfrac{3x^2}{\sqrt{1 + 9x^4}}$ и найти радиус сходимости.

9*. ④ Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $E = [0; +\infty)$ функцию $f(x) = 2x \operatorname{sh}(\cos^2 x)$.

10*. ④ Является ли множество $E = \{\exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) < 1 + x_5^2\}$ в пространстве $\mathbb{R}^5$ а) открытым; б) областью? Ответ обосновать.
