Вариант 1

1. ⑤ $df(M_0) = dx, \quad d^2(M_0) = -dy^2, \quad f(x,y) = x - 1 - \dfrac{y^2}{2} + o((x-1)^2 + y^2).$

2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geqslant 0$, дифференцируема при $\alpha > 1/2$.

3. ③ $L = 2\ln(1+\sqrt{2})$.

4 a). ④ Сходится при $0 \leqslant \alpha < 2$.

4 b). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 3/2$; условно сходится при $1 < \alpha \leqslant 3/2$; расходится при $\alpha \leqslant 1$.

5.② $\sqrt[n]{a_n} \to e^{-1/2}$ при $n \to \infty$, ряд сходится.

6.⑤ $f(x) = e^x$, $|f_n(x) - f(x)| = 2e^x \sin^2[1/(2nx)]$;
$x \in E_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant e^2/(2n^2)$, последовательность равномерно сходится на E_1;
$x_n = n \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| \sim e^n/(2n^4)$ при $n \to \infty$, сходится неравномерно на E_2.

7.④ $e^t - 1 = t\,e^{\xi},\ t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}; \quad x \in E_1, \quad |u_n(x)| \leqslant \dfrac{ex}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{x^2}{n+1} \leqslant \dfrac{e}{n^{3/2}};$
ряд равномерно сходится на E_1;
$x_n = \sqrt{n}, \quad u_n(x_n) \sim (e-1)\pi/4$ при $n \to \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2.

8.④ $f(x) = \dfrac{\pi x^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)\,4^n}; \quad R = 2.$

9.④ a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}.$
b) $f(x) = x^3 \sin x^5, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = x \sin x^5.$

Вариант 2

1. ⑤ $df(M_0) = dx, \quad d^2(M_0) = -dx^2 + 2\,dx\,dy, \quad f(x,y) = x - x^2/2 + x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2).$

2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geqslant 0$ и дифференцируема при $\alpha > 2/3$.

3. ③ $S = 1/2$.

4 a). ④ Сходится при $\alpha < 2$.

4 b). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \leqslant 1$; расходится при $\alpha \leqslant -2$.

5.② $a_{n+1}/a_n \to 1/3$ при $n \to \infty$, ряд сходится.

6.⑤ $f(x) = \sqrt{x}$, $|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{n}|\ln(1+t) - t|$, $t = \sqrt{x/n}$;
$x \in E_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1/\sqrt{n}$, последовательность равномерно сходится на E_1;
$x_n = \sqrt{n} \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = (1 - \ln 2)\sqrt{n} \to \infty$, сходится неравномерно на E_2.

7.④ $u_n(x) = 2\sin^2\left(\dfrac{x^{5/2}}{2\sqrt{n}}\right); \quad x \in E_1, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{2x^5}{4n} \cdot \dfrac{e^x}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{e}{2n^{3/2}};$
ряд равномерно сходится на E_1;
$x_n = \sqrt[5]{n}, \quad u_n(x_n) \sim \pi \sin^2(1/2)$ при $n \to \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2.

8.④ $f(x) = \pi x^4 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} \dfrac{(-1)^{n+1} 3^{2n+1} x^{2n+5}}{2n+1}; \quad R = 1/3.$

9.④ a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad f(x)g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}.$
b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}.$
c) a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}.$

Вариант 3

1. ⑤ $df(M_0) = dx, \quad d^2(M_0) = -dx^2, \quad f(x,y) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2 + y^2).$

2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geqslant 0$ и дифференцируема при $\alpha > 3/4$.

3. ③ $\mathcal{P} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$.

4 a). ④ Сходится при $-1 < \alpha < 0$.

4 b). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $1/2 < \alpha \leqslant 1$;
расходится при $\alpha \leqslant 1/2$.

5.② $\sqrt[n]{a_n} \to e^{-1/6}$ при $n \to \infty$, ряд сходится.

6.⑤ $f(x) = \operatorname{tg} x$, $|f_n(x) - f(x)| = n|\operatorname{arctg} t - t|$, $t = \operatorname{tg} x/n$;
$x \in E_1$, $|\operatorname{arctg} t - t| \leqslant Ct^2 \leqslant C/n^2$, последовательность равномерно сходится на E_1;
$x_n = \operatorname{arctg} n \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = n(1 - \pi/4)$, сходится неравномерно на E_2.

7.④ $\operatorname{sh} t = t \operatorname{ch} \xi$, $t = \frac{e^x}{n}$; $\quad x \in E_1, \quad |u_n(x)| \leqslant \frac{e \operatorname{ch} 1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e \operatorname{ch} 1}{n^{3/2}}$;
ряд равномерно сходится на E_1;
$x_n = \sqrt{n}, \quad u_n(x_n) > \frac{e^{\sqrt{n}} \sin 1}{\sqrt{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$; ряд сходится неравномерно на E_2.

8.④ $f(x) = \frac{\pi x}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)2^{2n+1}}; \quad R = \sqrt[3]{2}$.

9.④ a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin x}{x^3}$.
b) $f(x) = x^3 \sin x^5, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x)g(x) = x \sin x^5$.

Вариант 4

1. ⑤ $df(M_0) = 2dx - dy, \quad d^2(M_0) = 2dx^2 - dy^2,$
$f(x,y) = 2(x-1) - y + (x-1)^2 - y^2/2 + o((x-1)^2 + y^2)$.

2. ⑥ Непрерывна при $\alpha \geqslant 0$ и дифференцируема при $\alpha > 4/5$.

3. ③ $V = \pi(\pi + 2)/8$.

4 a). ④ Сходится при $\alpha > 0$.

4 b). ⑥ Абсолютно сходится при $\alpha > 1$; условно сходится при $-2 < \alpha \leqslant 1$;
расходится при $\alpha \leqslant -2$.

5.② $a_{n+1}/a_n \to 36/e$ при $n \to \infty$, ряд расходится.

6.⑤ $f(x) = x^2$, $|f_n(x) - f(x)| = x/\left[n\left(\sqrt{1 + 1/(nx)} + 1\right)\right]$;
$x \in E_1$, $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$, последовательность равномерно сходится на E_1;
$x_n = n \in E_2$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| > 1/(1 + \sqrt{2})$, сходится неравномерно на E_2.

7.④ $x \in E_1, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{e^x}{n} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{e}{n^{3/2}}$; ряд равномерно сходится на E_1;
$x_n = \sqrt[6]{n}, \quad u_n(x_n) > (n^{1/6} - \ln n) \sin 1 \to \infty$ при $n \to \infty$; сходится неравномерно на E_2.

8.④ $f(x) = \frac{\pi x^3}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+4}}{2n+1}; \quad R = 1/2$.

9.④ a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.
b) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{2 \cos x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.
c) a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$.