ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$
2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке (0,1) функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^2 - 2xy = \ln z + y$, где $z(0,1) = 1$. Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.④ Найти длину дуги кривой: $y = \ln(1+\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию

$$z(x,y) = \begin{cases} \ln\left(1 + x\sin\sqrt[3]{\dfrac{y^4}{x}}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arcctg}\frac{2x^2}{\sqrt{9-4x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x} + x^3)^\alpha}{(x^{17}+2)\arcsin\frac{x^2}{x^2+2}}\,dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^3\,dx}{(x+\cos\ln x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{n^2}{x}\sin\dfrac{x}{n^2} + \sin x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x+n}\operatorname{sh}\frac{x}{n}$.

8.⑤ Пусть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходится. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 61

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$

2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке $(1{,}0)$ функции $z = z(x{,}y)$, заданной неявно уравнением $z\,\mathrm{sh}(xy) + 2\ln z = 0$, где $z(1{,}0) = 1$. Разложить функцию $z = z(x{,}y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o((x-1)^2 + y^2)$.

2.④ Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0{,}0)$ функцию

$$z(x{,}y) = \sin^3\left(y + \sqrt[5]{xy}\right).$$

4.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1}{2} + 9x^2}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n+5}.$$

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(x^{1/2}+x^3)^\alpha}{(x^8+2)\ln(e^x - x)}\,dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{(x-\mathrm{arctg}\,x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0{,}1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{n} - \mathrm{ch}\,x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{\sqrt{1+nx}}$.

8.⑤ Пусть функция $f(x)$ непрерывна на луче $[1,+\infty)$, и интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)\,dx$ сходится. Верно ли, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 62

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$
2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке (0,1) функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z + xy = 2\operatorname{tg} z - 3\sin x$, где $z(0,1) = 0$.
Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

2.④ Найти длину дуги кривой: $$y = \ln(\cos x + \sin x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3.④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию
$$z(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{arctg} \dfrac{x^{4/3}}{y}, & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

4.④ Разложить по степеням x функцию
$$f(x) = \ln\left(2x^2 + \sqrt{9 + 4x^4}\right)$$
и найти радиус сходимости полученного ряда.

5.③ Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$.

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x^3} + x^2)^\alpha}{(x^{11} + 3)\operatorname{arctg}^2 x}\, dx$; б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2\, dx}{(x + \sin\ln x)^\alpha}$.

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = n^2 \sin^2 \dfrac{x}{n} + \cos x$,

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n} \operatorname{th} \frac{x}{n}$.

8.⑤ Пусть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, причем $a_n \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 63

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{2}$

2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑤ Найти первый и второй дифференциалы в точке $(2,-2)$ функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^2+x^2+2y = \sin(zx)$, где $z(2,-2) = 0$. Разложить функцию $z = z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности этой точки до $o((x-2)^2+(y+2)^2)$.

---

2. ④ Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$$y = \sqrt{2+x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}.$$

---

3. ④ Исследовать на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$ функцию

$$z(x,y) = \operatorname{arctg}^2\left(x + \sqrt[3]{xy}\right).$$

---

4. ④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4+9x^2}{4-9x^2}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

---

5. ③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3-4n+5}.$$

---

6. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственные интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(x^{1/4}+x^{3/4})^{\alpha}}{(x^8+4)\sin\frac{x^3}{x^3+3}}\,dx;$ б) ⑥ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{(x^2-\sqrt{x-1})^{\alpha}}.$

---

7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$

а) ⑤ функциональную последовательность $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right) - 5\operatorname{sh}x,$

б) ④ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{(1+nx)^{1/3}}.$

---

8. ⑤ Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на интервале $[1,+\infty)$, а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Верно ли, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}\,dx$ сходится? Доказать или опровергнуть примером.
