Вариант 51

1. 4 $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2x-2}{x^2-x+1}$;

$$\int\frac{x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}\,dx=3\ln|x-1|-\ln(x^2-x+1)+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C.$$

2. 4 $\displaystyle\int\ln(1+\sqrt{x})\,dx=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C.$

3. 3 $u=x^2+x$; $v=a^x$, $a=4^5\cdot3^2$; $\ln^n a=(5\ln4+3\ln3)^n$;

$$y^{(n)}=(x^2+x)\cdot a^x\cdot\ln^n a+n\cdot(2x+1)\cdot a^x\cdot\ln^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2\cdot a^x\cdot\ln^{n-2}a.$$

4. 5 $t=x-1$; $y(t)=\left(\dfrac{t^2+3}{7}\right)\ln(1+t^2)$;

$$y(t)=\frac{3}{7}t^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{7}\left[\frac{1}{k-1}-\frac{3}{k}\right]t^{2k}+o(t^{2n+1}).$$

5. 4 Асимптоты: $y=x+1$, $x=2$; $y'=\dfrac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$, $y''=\dfrac{6(x-1)}{(x-2)^4}$;

$A(4,\,27/4)$ — точка локального минимума; $B(1,\,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

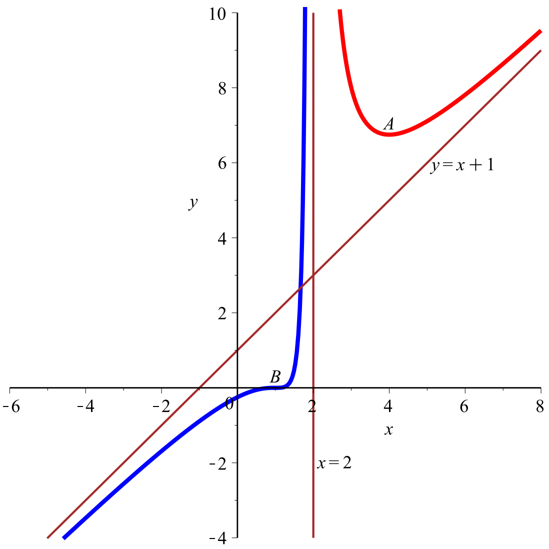

Рис. к № 5

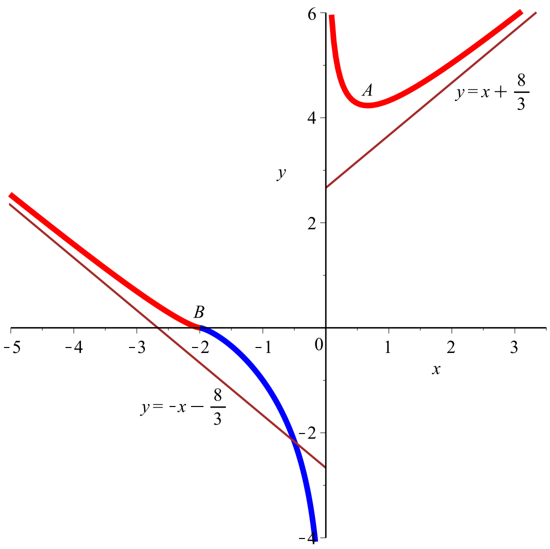

Рис. к № 6

6. 6 Асимптоты: $y=x+\dfrac{8}{3}$ при $x\to+\infty$, $y=-x-\dfrac{8}{3}$ при $x\to-\infty$, $x=0$;

$$y'=\operatorname{sign}(x+2)\,\frac{(3x-2)(x+2)^{1/3}}{x^{4/3}},\quad y''=\operatorname{sign}(x+2)\,\frac{16}{9x^{7/3}(x+2)^{2/3}};$$

$A(2/3,8\sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального минимума, $8\sqrt[3]{4}/3\sim4.2$; $B(-2,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

7. ⑤ $\dfrac{\operatorname{arctg}\arcsin 3x-\arcsin 3x}{\ln \operatorname{ch} 2x-\operatorname{ch}\ln(1-2x)+1}=\dfrac{-9x^3+o(x^3)}{-4x^3+o(x^3)}$, $x\to 0$. Ответ: $9/4$.

8. ⑤ Основание степени: $1+\dfrac{7\,x^3}{24}+o(x^3)$; показатель степени: $\dfrac{1}{4x^3/3+o(x^3)}$. Ответ: $e^{7/32}$.

9. ③ $k(t)=\dfrac{6}{(18-16\cos^2 t)^{3/2}}=\dfrac{6}{(2+16\sin^2 t)^{3/2}}$, $\qquad k_{\min}=\dfrac{1}{9\sqrt{2}}$ при $t=\dfrac{\pi}{2}$.

10. ② $z^3-8z^2+22z-20=(z-2)(z^2-6z+10)$, $\quad z_1=2$, $\quad z_{2,3}=3\pm i$.

11. ③ $x_1=1$, $\quad x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5x_n+6}$.

1) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

При $n=2$ получаем, что $x_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{11}<\dfrac{1}{2}\sqrt{16}=2$. Предположим, что $x_n<2$, докажем, что $x_{n+1}<2$. Из рекуррентного соотношения находим $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5x_n+6}<\dfrac{1}{2}\sqrt{16}=2$.

2) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Выполнено

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{\frac{5x_n+6}{4}}-x_n=\frac{-4x_n^2+5x_n+6}{4\sqrt{\dfrac{5x_n+6}{4}}+4x_n}.$$

Таким образом, знак $x_{n+1}-x_n$ совпадает со знаком выражения $-4x_n^2+5x_n+6$.

Парабола $y=-4x^2+5x+6$ при $-\dfrac{3}{4}<x<2$ принимает положительные значения.

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

3) Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$. Из рекуррентного соотношения находим, что $b=2$.

Вариант 52

1. ④ $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x+2}{x^2-x+1}\right)$;

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln|x+1| + \ln(x^2-x+1) + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

2. ④ $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x+3}\,dx = (x+4)\operatorname{arctg}\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} + C.$

3. ③ $u = x^2-2x$, $v = \log_2(2x+1)$;

$$y^{(n)} = (x^2-2x)\cdot\frac{2^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+1)^n\ln 2} + n\cdot(2x-2)\cdot\frac{2^{n-1}(-1)^n(n-2)!}{(2x+1)^{n-1}\ln 2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\frac{2^{n-2}(-1)^{n-1}(n-3)!}{(2x+1)^{n-2}\ln 2}.$$

4. ⑤ $t = x+1$; $y(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)(1+\cos 2t)$;

$$y(t) = 2 - t^2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-3}}{(2k-2)!}\left[1 - \frac{4}{k(2k-1)}\right]t^{2k} + o(t^{2n+1}).$$

5. ④ Асимптоты: $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{3}$, $x=-1$; $y' = -\dfrac{(x-2)^2(x+7)}{3(x+1)^3}$, $y'' = -\dfrac{18(x-2)}{(x+1)^4}$;

$A(-7,\ 27/4)$ — точка локального минимума; $B(2,\ 0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

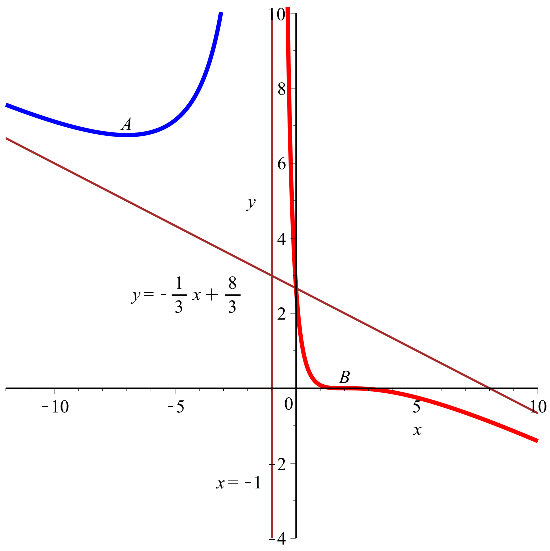

Рис. к № 5

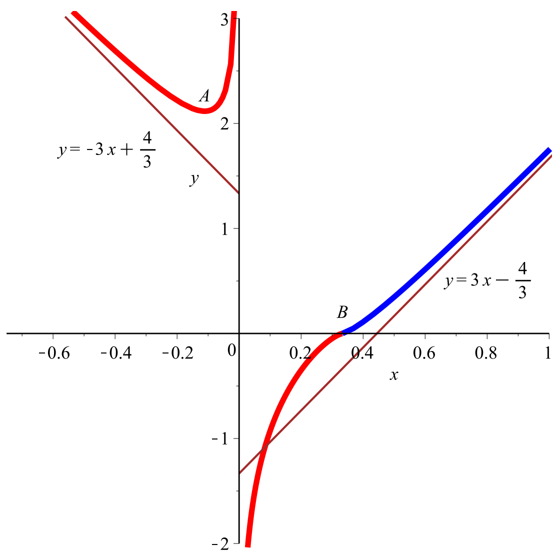

Рис. к № 6

6. ⑥ Асимптоты: $y = 3x - \dfrac{4}{3}$ при $x\to+\infty$, $y = -3x + \dfrac{4}{3}$ при $x\to-\infty$, $x=0$;

$$y' = \operatorname{sign}(3x-1)\,\frac{(3x-1)^{1/3}(9x+1)}{(3x)^{4/3}},\quad y'' = \operatorname{sign}(3x-1)\,\frac{4}{(3x)^{7/3}(3x-1)^{2/3}};;$$

$A(-1/9, 4\sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального минимума, $4\sqrt[3]{4}/3 \sim 2.1$; $B(1/3,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

7. ⑤ $\dfrac{\sin \operatorname{th}(x/2) - \operatorname{th}(x/2)}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} - \dfrac{2x}{1-x^2/3}} = \dfrac{-x^3/48 + o(x^3)}{x^3/3 + o(x^3)}$, $x \to 0$. Ответ: $-1/16$.

8. ⑤ Основание степени: $1 - \dfrac{x^3}{5} + o(x^3)$; показатель степени: $\dfrac{1}{x^3/16 + o(x^3)}$. Ответ: $e^{-16/5}$.

9. ③ $k(t) = \dfrac{15}{(50\operatorname{ch}^2 t - 5)^{3/2}} = \dfrac{15}{(45 + 50\operatorname{sh}^2 t)^{3/2}}$, $\qquad k_{\max} = \dfrac{1}{9\sqrt{5}}$ при $t = 0$.

10. ② $z^3 + 7z^2 + 24z + 18 = (z+1)(z^2 + 6z + 18)$, $\quad z_1 = -1$, $\quad z_{2,3} = -3 \pm 3i$.

11. ③ $x_1 = 0$, $\quad x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{25 + 15x_n}$.

1) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.
При $n = 2$ получаем, что $x_2 = \dfrac{5}{2} < 5$. Предположим, что $x_n < 5$, докажем, что $x_{n+1} < 5$. Из рекуррентного соотношения находим $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{25 + 15x_n} < \dfrac{1}{2}\sqrt{100} = 5$.

2) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Выполнено

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{\frac{25 + 15x_n}{4}} - x_n = \frac{-4x_n^2 + 15x_n + 25}{4\sqrt{\dfrac{25 + 15x_n}{4}} + 4x_n}.$$

Таким образом, знак $x_{n+1} - x_n$ совпадает со знаком выражения $-4x_n^2 + 15x_n + 25$.
Парабола $y = -4x^2 + 15x + 25$ при $-\dfrac{5}{4} < x < 5$ принимает положительные значения.
Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

3) Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Из рекуррентного соотношения находим, что $b = 5$.

Вариант 53

1. ④ $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2-x+2}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{4x+2}{x^2-x+1}\right)$;

$$\int\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-x+2}\,dx=\frac{1}{7}\left(3\ln|x+2|+2\ln(x^2-x+1)+\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

2. ④ $\displaystyle\int\ln(3-\sqrt{x})\,dx=(x-9)\ln(3-\sqrt{x})-\frac{x}{2}-3\sqrt{x}+C.$

3. ③ $u=x^2-x$; $v=a^x$, $a=3^4\cdot 2^5$; $\ln^n a=(4\ln 3+5\ln 2)^n$;

$$y^{(n)}=(x^2-x)\cdot a^x\cdot\ln^n a+n\cdot(2x-1)\cdot a^x\cdot\ln^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot a^x\cdot\ln^{n-2}a.$$

4. ⑤ $t=x-2$; $y(y)=\dfrac{t^2-4}{5}\ln(1+t^2)$;

$$y(t)=-\frac{4}{5}t^2+\frac{1}{5}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\left[\frac{4}{k}+\frac{1}{k-1}\right]t^{2k}+o(t^{2n+1}).$$

5. ④ Асимптоты: $y=x+2$, $x=1$; $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$;

$A(3,\,27/4)$ — точка локального минимума; $B(0,\,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

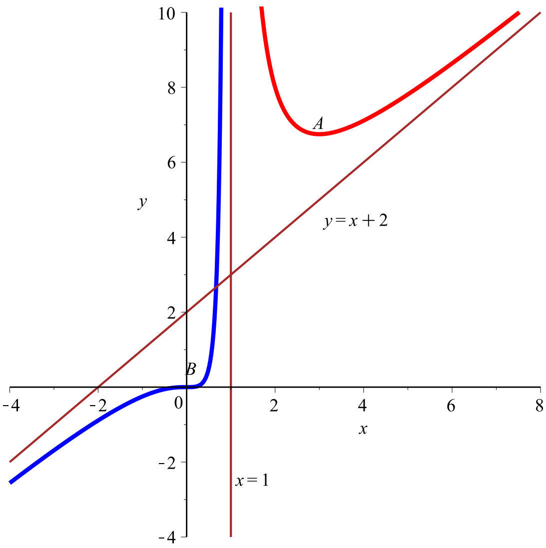

Рис. к № 5

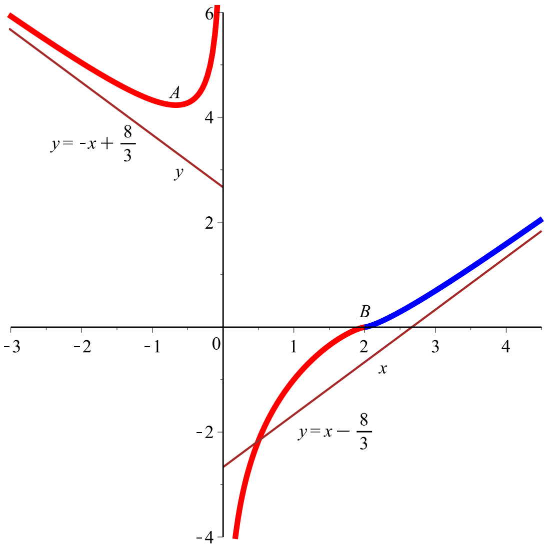

Рис. к № 6

6. ⑥ Асимптоты: $y=x-\dfrac{8}{3}$ при $x\to+\infty$, $y=-x+\dfrac{8}{3}$ при $x\to-\infty$, $x=0$;

$$y'=\operatorname{sign}(x-2)\,\frac{(x-2)^{1/3}(3x+2)}{x^{4/3}},\ y''=\operatorname{sign}(x-2)\,\frac{16}{9x^{7/3}(x-2)^{2/3}};;$$

$A(-2/3,8\sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального минимума, $8\sqrt[3]{4}/3\sim 4.2$; $B(2,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

7. ⑤ $\dfrac{\arcsin \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} 3x}{\ln\cos 2x - \cos\ln(1+2x)+1} = \dfrac{9x^3/2 + o(x^3)}{-4x^3 + o(x^3)}$, $x \to 0$. Ответ: $-9/8$.

8. ⑤ Основание степени: $1 + \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$; показатель степени: $\dfrac{1}{-9x^3/2 + o(x^3)}$. Ответ: $e^{-8/27}$.

9. ③ $k(t) = \dfrac{26}{(52 - 39\cos^2 t)^{3/2}} = \dfrac{26}{(13 + 39\sin^2 t)^{3/2}}$, $\qquad k_{\min} = \dfrac{1}{4\sqrt{13}}$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$.

10. ② $z^3 + z - 10 = (z-2)(z^2 + 2z + 5)$, $\quad z_1 = 2$, $\quad z_{2,3} = -1 \pm 2i$.

11. ③ $x_1 = 1$, $\quad x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15 + 7x_n}$.

1) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.
При $n = 2$ получаем, что $x_2 = \dfrac{\sqrt{22}}{2} < 3$. Предположим, что $x_n < 3$, докажем, что $x_{n+1} < 3$. Из рекуррентного соотношения находим $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15 + 7x_n} < \dfrac{1}{2}\sqrt{36} = 3$.

2) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Выполнено

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{\frac{15 + 7x_n}{4}} - x_n = \frac{-4x_n^2 + 7x_n + 15}{4\sqrt{\dfrac{15 + 7x_n}{4}} + 4x_n}.$$

Таким образом, знак $x_{n+1} - x_n$ совпадает со знаком выражения $-4x_n^2 + 7x_n + 15$.
Парабола $y = -4x^2 + 7x + 15$ при $-\dfrac{5}{4} < x < 3$ принимает положительные значения.
Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

3) Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Из рекуррентного соотношения находим, что $b = 3$.

Вариант 54

1. ④ $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x-3}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{13}{x-3}-\dfrac{6x-2}{x^2-x+1}\right)$;

$$\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x-3}\,dx=\frac{1}{7}\left(13\ln|x-3|-3\ln(x^2-x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

2. ④ $\displaystyle\int\operatorname{arctg}\sqrt{2-x}\,dx=(x-3)\operatorname{arctg}\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}+C.$

3. ③ $u=x^2+x$, $v=\log_3(3x-1)$;

$$y^{(n)}=(x^2+x)\cdot\frac{3^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(3x-1)^n\ln 3}+n\cdot(2x+1)\cdot\frac{3^{n-1}(-1)^n(n-2)!}{(3x-1)^{n-1}\ln 3}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\frac{3^{n-2}(-1)^{n-1}(n-3)!}{(3x-1)^{n-2}\ln 3}.$$

4. ⑤ $t=x+2$, $y(t)=\left(\dfrac{t^2}{2}+1\right)(1-\cos t)$;

$$y(t)=2t^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-3}}{(2k-2)!}\left[\frac{4}{k(2k-1)}-1\right]t^{2k}+o(t^{2n+1}).$$

5. ④ Асимптоты: $y=-x-7$, $x=2$; $y'=-\dfrac{(x+1)^2(x-8)}{(x-2)^3}$, $y''=-\dfrac{54(x+1)}{(x-2)^4}$;

$A(8,\,-81/4)$ — точка локального минимума; $B(-1,\,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

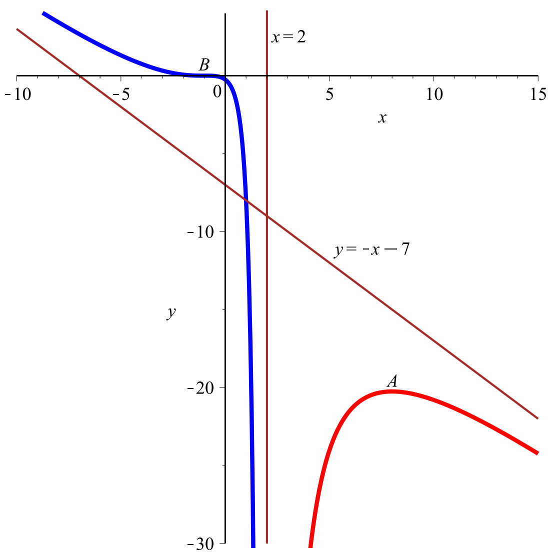

Рис. к № 5

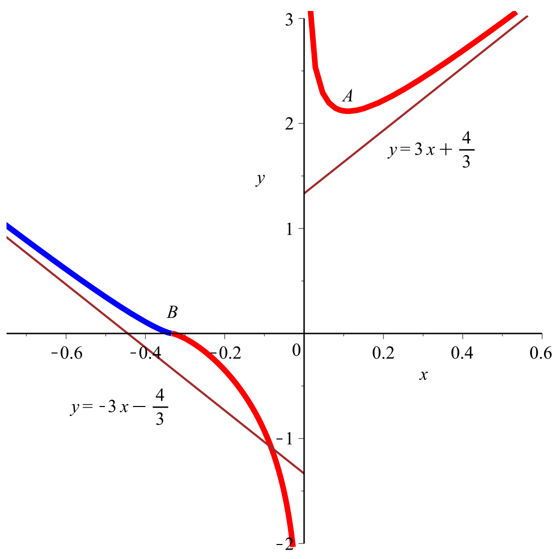

Рис. к № 6

6. ⑥ Асимптоты: $y=3x+\dfrac{4}{3}$ при $x\to+\infty$, $y=-3x-\dfrac{4}{3}$ при $x\to-\infty$, $x=0$;

$$y'=\operatorname{sign}(3x+1)\,\frac{(3x+1)^{1/3}(9x-1)}{(3x)^{4/3}},\ y''=\operatorname{sign}(3x+1)\,\frac{4}{(3x)^{7/3}(3x+1)^{2/3}};$$

$A(1/9, 4\sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального минимума, $4\sqrt[3]{4}/3\sim 2.1$; $B(-1/3,0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной.

7. ⑤ $\dfrac{\operatorname{sh}\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}2x}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-3x}-\dfrac{2x}{1-2x^2}}=\dfrac{4x^3/3+o(x^3)}{-2x^3/3+o(x^3)}$, $x\to 0$. Ответ: -2.

8. ⑤ Основание степени: $1-\dfrac{2x^3}{3}+o(x^3)$; показатель степени: $\dfrac{1}{-x^3/16+o(x^3)}$. Ответ: $e^{32/3}$.

9. ③ $k(t)=\dfrac{20}{(50\operatorname{ch}^2 t-10)^{3/2}}=\dfrac{20}{(40+50\operatorname{sh}^2 t)^{3/2}}$, $\quad k_{\max}=\dfrac{1}{4\sqrt{10}}$ при $t=0$.

10. ② $z^3+3z^2+z-5=(z-1)(z^2+4z+5)$, $\quad z_1=1$, $\quad z_{2,3}=-2\pm i$.

11. ③ $x_1=0$, $\quad x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}$.
1) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.
При $n=2$ получаем, что $x_2=\dfrac{1}{2}<1$. Предположим, что $x_n<1$, докажем, что $x_{n+1}<1$. Из рекуррентного соотношения находим $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+3x_n}<\dfrac{1}{2}\sqrt{4}=1$.
2) Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Выполнено

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{\frac{1+3x_n}{4}}-x_n=\frac{-4x_n^2+3x_n+1}{4\sqrt{\dfrac{1+3x_n}{4}}+4x_n}.$$

Таким образом, знак $x_{n+1}-x_n$ совпадает со знаком выражения $-4x_n^2+3x_n+1$.
Парабола $y=-4x^2+3x+1$ при $-\dfrac{1}{4}<x<1$ принимает положительные значения.
Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.
3) Последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$. Из рекуррентного соотношения находим, что $b=1$.