

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Введение в математический анализ** Курс **1** Семестр **1** 2011–2012

Фамилия студента \_\_\_\_\_ № группы \_\_\_\_\_

Сумма баллов	повышен.	базовый	Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора		

1. ② Найти в точке  $t = 0$  радиус кривизны кривой, заданной параметрически:

$$x(t) = e^t(\cos t - \sin t), \quad y(t) = e^t(\sin t + \cos t).$$

2. Вычислить интегралы:

a) ③  $\int \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x^2+3)} dx;$

b) ⑤  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)^{3/2}} dx.$

3. ③ Найти  $y^{(n)}$  при  $n \geq 3$  в области определения функции  $y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{3x+8}}$ .

4. ④ Разложить функцию  $f(x) = (x^2 + 6x) \ln \sqrt{-x(6+x)}$  в точке  $x_0 = -3$  до  $o((x+3)^{2n+1})$ ,  $n \geq 2$ .

5. Построить графики функций:

a) ④  $y = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x+3)^2};$

b) ⑥  $y = \sqrt[3]{\frac{|x-3|}{x+2}}.$

6. ④ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \cos \left( \frac{x}{1-x} \right) - \ln(1-x) - \arcsin x \right] \frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) - \operatorname{th}(x/2)}.$

7. ⑥ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sin(\sin(x+x^2)) - \cos(\ln(1+2x))}{e^{-x/3} \operatorname{tg} x - \ln(1+x+x^2/6)}.$

8. ⑧ Построить график кривой  $x(t) = \frac{(3-t)^3}{(t-2)^2}, \quad y(t) = \frac{(3-t)(2t-5)}{(t-2)^2}.$

9\*. ③ Доказать неравенство:  $\frac{\pi}{2} \sin x > \frac{x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

10\*. ④ Функция  $f$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $f(f(0)) < 0$ ,  $f(f(1)) > 1$ . Доказать, что функция  $f$  имеет неподвижную точку, т. е. такую точку  $\xi \in \mathbb{R}$ , что  $f(\xi) = \xi$ .

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Введение в математический анализ Курс 1 Семестр 1 2011–2012

Фамилия студента \_\_\_\_\_ № группы \_\_\_\_\_

Сумма баллов	повышен.	базовый	Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора		

1. ② Найти в точке  $t = 1$  радиус кривизны кривой, заданной параметрически:

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y(t) = \frac{t^3 - 1}{t}.$$

2. Вычислить интегралы:

a) ③  $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2-2x+3)};$

b) ⑤  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$

3. ③ Найти  $y^{(n)}$  при  $n \geq 3$  в области определения функции  $y = (x^2 + x - 2) \ln \sqrt{x^2 + x - 2}$ .

4. ④ Разложить функцию  $f(x) = (x^2 + 2x) \operatorname{ch}^2(x + 1)$  в точке  $x_0 = -1$  до  $o((x + 1)^{2n+1})$ ,  $n \geq 2$ .

5. Построить графики функций:

a) ④  $y = \frac{(3x-5)(3-x)}{(x-2)^2};$

b) ⑥  $y = \sqrt[3]{\frac{|x-1|}{x+1}}.$

6. ④ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1-2x} - \ln(\cos x) + \operatorname{arctg} x \right] \frac{4}{\arcsin 2x - \sin 2x}.$

7. ⑥ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+3x)^2} - \operatorname{sh}(\operatorname{sh}(2x+x^2)) - \cos(e^{2x}-1)}{\frac{\arcsin x}{1-2x} + \ln(1-x-3x^2/2)}.$

8. ⑧ Построить график кривой  $x(t) = \frac{1}{(t-1)(t+2)}, \quad y(t) = \frac{4t+5}{(t+2)^2}.$

9\*. ③ Доказать неравенство:  $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} < \frac{4}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

10\*. ④ Функция  $f$  определена на  $\mathbb{R}$  и  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ . Доказать, что для каждой точки  $x \in \mathbb{R}$  последовательность  $\{f^n(x)\}$  сходится, где  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ .

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Введение в математический анализ Курс 1 Семестр 1 2011–2012

Фамилия студента \_\_\_\_\_ № группы \_\_\_\_\_

Сумма баллов	повышен.	базовый	Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора		

1. ③ Найти в точке  $t = \pi/2$  радиус кривизны кривой, заданной параметрически:

$$x(t) = \sin^2 t \cos t, \quad y(t) = \sin t \cos^2 t.$$

2. Вычислить интегралы:

a) ③  $\int \frac{x^2 + 5x}{(x-1)(x^2+5)} dx;$

b) ⑤  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)^{3/2}} dx.$

3. ③ Найти  $y^{(n)}$  при  $n \geq 4$  в области определения функции  $y = (3x^2 + 7x)\sqrt{7x-3}$ .

4. ④ Разложить функцию  $f(x) = (x^2 - 4x) \ln \sqrt{x(4-x)}$  в точке  $x_0 = 2$  до  $o((x-2)^{2n+1})$ ,  $n \geq 2$ .

5. Построить графики функций:

a) ④  $y = \frac{(x+2)(1-2x)}{(x-3)^2};$

b) ⑥  $y = \sqrt[3]{\frac{|x-3|}{x-1}}.$

6. ④ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \operatorname{ch} x - \ln(1-x) - \sin \left( \frac{x}{1-x} \right) \right] \frac{1}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}.$

7. ⑥ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{e^{x^2} + 3x} - \frac{\arcsin x}{x} - \ln \left( 1 + x - \frac{x^2}{3} \right)}{\sqrt{1+2x} \cdot \operatorname{arctg} \left( x + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x}{1+x} - \frac{5x^2}{2}}.$

8. ⑧ Построить график кривой  $x(t) = \frac{(t+2)^3}{(t+1)^2}, \quad y(t) = \frac{(t+2)(2t+3)}{(t+1)^2}.$

9\*. ③ Доказать неравенство:  $\frac{2}{3} \operatorname{sh} 2x < \frac{x}{\ln 2}, \quad x \in \left( 0, \frac{\ln 2}{2} \right).$

10\*. ④ Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и принимает только целые значения. Доказать, что  $\{f^n(x)\}$  сходится для любой точки  $x \in \mathbb{R}$ , где  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ .

# ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Введение в математический анализ Курс 1 Семестр 1 2011–2012

Фамилия студента \_\_\_\_\_ № группы \_\_\_\_\_

Сумма баллов	повышен.	базовый	Оценка	пятибалл.	десятибалл.
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора		

1. ② Найти в точке  $t = 1$  радиус кривизны кривой, заданной параметрически:

$$x(t) = \frac{t+1}{t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2-2}{t^2}.$$

2. Вычислить интегралы:

a) ③  $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+2x+4)};$

b) ⑤  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$

3. ③ Найти  $y^{(n)}$  при  $n \geq 3$  в области определения функции  $y = (x^2 - x) \ln \sqrt{\frac{2x+3}{x-8}}$ .

4. ④ Разложить функцию  $f(x) = (x^2 - 2x) \cos^2(x - 1)$  в точке  $x_0 = 1$  до  $o((x - 1)^{2n+1})$ ,  $n \geq 2$ .

5. Построить графики функций:

a) ④  $y = \frac{(3x+1)(3-x)}{(x+2)^2};$

b) ⑥  $y = \sqrt[3]{\frac{|x-2|}{x-1}}.$

6. ④ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{1+2x} + \ln(\operatorname{ch} x) - \operatorname{th} x \right] \frac{4}{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}.$

7. ⑥ Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x + 3x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \ln(1+x-3x^2/2)}{e^{-x/2} \operatorname{sh} x - \ln(1+x)}.$

8. ⑧ Построить график кривой  $x(t) = \frac{1}{(3-t)(t-1)}, \quad y(t) = \frac{3-2t}{(t-1)^2}.$

9\*. ③ Доказать неравенство:  $\frac{\sin^2 x}{x} < \frac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

10\*. ④ Функция  $f$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $f(f(x)) = x$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Доказать, что существует такая точка  $z \in \mathbb{R}$ , что последовательность  $\{f^n(z)\}$  сходится, где  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ .