Вариант 1

1. ③ $k(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$, $\quad x_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad k_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

2a). ⑤ $\dfrac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)} = -\dfrac{1}{(2x-1)^2} + \dfrac{x+3}{x^2+2x+10}$;

$$\int \frac{4x^3+7x^2-13x-7}{(2x-1)^2(x^2+2x+10)}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2}\,\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

2b). ④ $$\int \frac{\exp\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 3(\sqrt[3]{x}-1)\exp(\sqrt[3]{x}) + C.$$

3. ③

$$y^{(n)}(x) = -\frac{3\cdot 2^{n-1}\,(n-3)!}{(3-2x)^n \ln 3}\Big[(n-1)(n-2)(2x+3)^2 + 2n(n-2)(2x+3)(3-2x) + n(n-1)(3-2x)^2\Big].$$

4. ④ $y = -12 - 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\ln 2}+3\right)\frac{(-1)^k(\ln 2)^k(x+1)^{2k}}{k!} + o((x+1)^{2n+1})$.

5a). ⑤

$y'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x(x^2+6x-16)}{(x+2)^3}$;

$y''(x) = \dfrac{4(7x-4)}{(x+2)^4}$;

$x_{\max} = 0$, $y_{\max} = 0$;

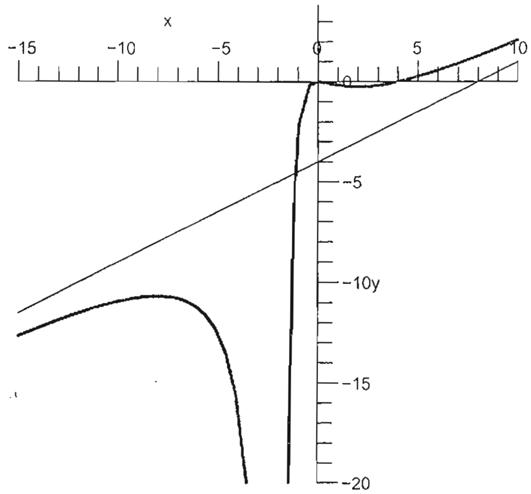
$x_{\max} = -8$, $y_{\max} = -\dfrac{32}{3}$;

$x_{\min} = 2$, $y_{\min} = -\dfrac{1}{4}$;

точка перегиба $\left(\dfrac{4}{7}, -\dfrac{16}{189}\right)$;

вертикальная асимптота: $x = -2$;

наклонная асимптота: $y = \dfrac{x}{2} - 4$.



5b). ⑥

при $x \geqslant 2$: $y'(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{3x-1}{(x-2)^{2/3}(x+3)^{1/3}}$;

$y''(x) = -\dfrac{50}{9}\,\dfrac{1}{(x-2)^{5/3}(x+3)^{4/3}}$;

при $x \leqslant 2$: $y'(x) = -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{3x-1}{(2-x)^{2/3}(x+3)^{1/3}}$;

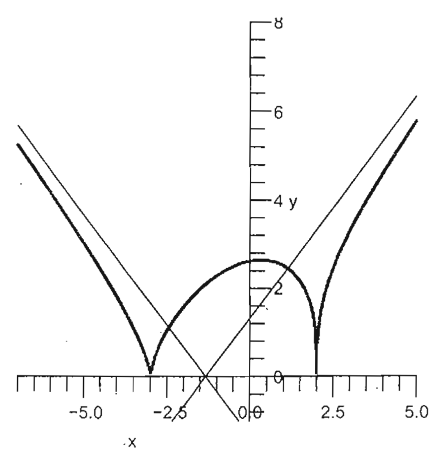
$y''(x) = -\dfrac{50}{9}\,\dfrac{1}{(2-x)^{5/3}(x+3)^{4/3}}$;

$x_{\min} = -3$, $y_{\min} = 0$; $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$x_{\max} = \dfrac{1}{3}$, $y_{\max} = \dfrac{5\sqrt[3]{4}}{3} \approx 2.7$;

наклонные асимптоты: $y = x + \dfrac{4}{3}$, $x \to +\infty$;

$y = -x - \dfrac{4}{3}$, $x \to -\infty$.



6. ⑤ Числитель: $-\dfrac{11}{6}x^3+o(x^3)$. Знаменатель: $x^3+o(x^3)$. Ответ: $-\dfrac{11}{6}$.

7. ⑥ Степень: $\dfrac{1}{-\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)}$. Основание: $\dfrac{-2x^2-2x^4+o(x^4)}{-2x^2-\dfrac{4x^4}{3}+o(x^4)}=1+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$. Ответ: e^{-1}.

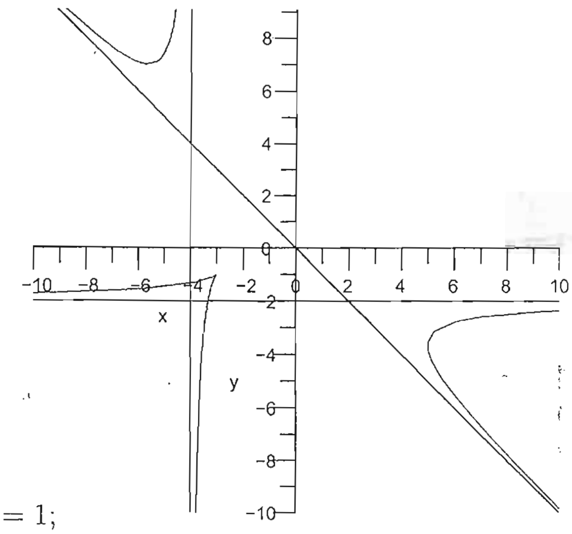
8. ⑧

$\dot{x}(t)=\dfrac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$;

$\dot{y}(t)=-\dfrac{(t+3)(t+7)}{(t+5)^2}$;

$y'_x=-\dfrac{(t+7)(t+1)^2}{(t-1)(t+5)^2}$;

$y''_{xx}=\dfrac{96(t+1)^3}{(t+3)(t-1)^3(t+5)^3}$.



$x=-4$ — вертикальная асимптота $t\to-5$;
$y=-2$ — горизонтальная асимптота $t\to-1$;
$y=-x$ — наклонная асимптота $t\to\pm\infty$.

$A(-3,-1)$ — точка возврата при $t=-3$, $y'_x(-3)=1$;
$B\left(-\dfrac{17}{3},7\right)$ — точка локального минимума при $t=-7$;
$C\left(5,-\dfrac{11}{3}\right)$ — точка с вертикальной касательной при $t=1$.

9. ⑥ Последовательность периодическая, $x_{2010}=\dfrac{2}{35}$.

Вариант 2

1. ③ $k_{\max} = \dfrac{5}{8}\sqrt[4]{135}.$

2a). ⑤ $\dfrac{2x^3+4x^2+13x+1}{(x^2-1)(x^2+4)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2+4};$

$$\int \frac{2x^3+4x^2+13x+1}{(x^2-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

2b). ④ $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx = \sin(e^x) - e^x\cos(e^x) + C.$

3. ③

$$y^{(n)}(x) = 8^{n-1}\left[4(2-4x)^2\cos\left(8x+\frac{\pi n}{2}\right) - 4n(2-4x)\sin\left(8x+\frac{\pi n}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(8x+\frac{\pi n}{2}\right)\right].$$

4. ④ $y = \dfrac{2\ln 6}{\ln 3} + \left(\dfrac{3\ln 6 - 1}{3\ln 3}\right)t + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{(-1)^k(k+2)}{3^k} - \frac{2(2k-1)}{2^k}\right]\frac{(x-3)^k}{k(k-1)\ln 3} + o((x-3)^n).$

5a). ⑤

$y'(x) = \dfrac{2x(x^2+3x-4)}{(x+1)^3};$

$y''(x) = \dfrac{4(7x-2)}{(x+1)^4};$

$x_{\max} = 0,\ y_{\max} = 0;$

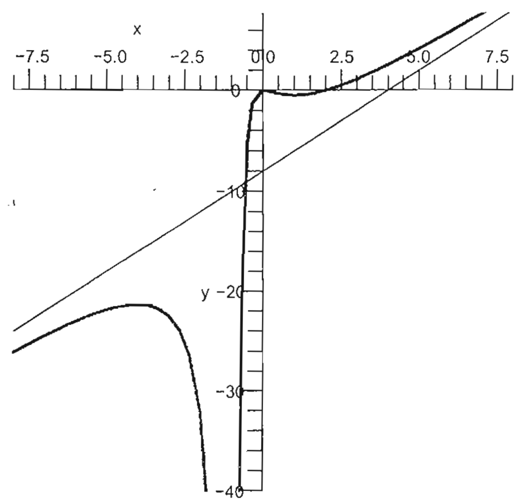
$x_{\max} = -4,\ y_{\max} = -\dfrac{64}{3};$

$x_{\min} = 1,\ y_{\min} = -\dfrac{1}{2};$

точка перегиба $\left(\dfrac{2}{7}, -\dfrac{32}{189}\right);$

вертикальная асимптота: $x = -1;$

наклонная асимптота: $y = 2x - 8.$



5b). ⑥

при $x \geqslant 1$: $y'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{3x+2}{(x-1)^{2/3}(x+4)^{1/3}};$

$y''(x) = -\dfrac{50}{9}\dfrac{1}{(x-1)^{5/3}(x+4)^{4/3}};$

при $x \leqslant 1$: $y'(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{3x+2}{(1-x)^{2/3}(x+4)^{1/3}};$

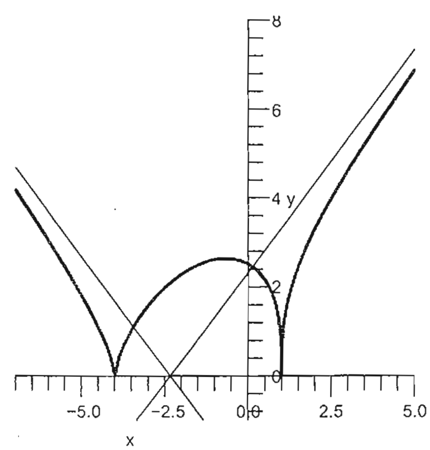
$y''(x) = -\dfrac{50}{9}\dfrac{1}{(1-x)^{5/3}(x+4)^{4/3}};$

$x_{\min} = 1,\ y_{\min} = 0;\ x_{\min} = -4,\ y_{\min} = 0;$

$x_{\max} = -\dfrac{2}{3},\ y_{\max} = \dfrac{5\sqrt[3]{4}}{3} \approx 2.7;$

наклонные асимптоты: $y = x + \dfrac{7}{3},\ x \to +\infty;$

$y = -x - \dfrac{7}{3},\ x \to -\infty.$



6. ⑤ Числитель: $\frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$. Знаменатель: $\frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Ответ: $\frac{15}{2}$.

7. ⑥ Степень: $\dfrac{1}{\frac{8x^2}{3} + o(x^2)}$. Основание: $\dfrac{-2x^2 - \frac{4x^4}{3} + o(x^4)}{-2x^2 - \frac{20x^4}{3} + o(x^4)} = 1 - \frac{8x^2}{3} + o(x^2)$. Ответ: e^{-1}.

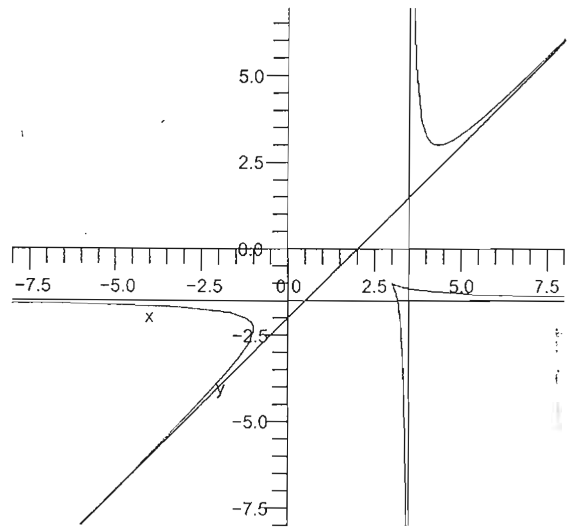
8. ⑧

$\dot{x}(t) = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$;

$\dot{y}(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$;

$y'_x = \dfrac{(t-2)(t+1)^2}{(t-1)^2(t+2)}$;

$y''_{xx} = \dfrac{12(t+1)^3}{t(t-1)^3(t+2)^3}$.



$x = \frac{7}{2}$ — вертикальная асимптота $t \to 1$;

$y = -\frac{3}{2}$ — горизонтальная асимптота $t \to -1$;

$y = x - 2$ — наклонная асимптота $t \to \pm\infty$.

$A(3, -1)$ — точка возврата при $t = 0$, $y'_x(0) = -1$;

$B\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ — точка локального минимума при $t = 2$;

$C\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$ — точка с вертикальной касательной при $t = -2$.

9. ⑥ Последовательность периодическая, $x_{2010} = 2$.

Вариант 3

1. ③ $k(x) = \dfrac{4(4-x^2)}{(4+x^2)^2}$, $\quad x_{\max} = 0$, $\quad k_{\max} = 1$. $\quad y' = \dfrac{4x}{x^2-4}$; $y'' = -4\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$; $K' = \dfrac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$

2a). ⑤ $\dfrac{2x^3-17x^2-8x-16}{(x-1)^2(4x^2+4x+5)} = -\dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2x-1}{4x^2+4x+5}$;

$$\int \frac{2x^3-17x^2-8x-16}{(x-1)^2(4x^2+4x+5)}\,dx = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{4}\ln(4x^2+4x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2} + C.$$

2b). ④ $$\int \frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{x}-1)\ln(1+\sqrt[4]{x}) - \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + C.$$

3. ③

$$y^{(n)}(x) = -\frac{2\cdot 3^{n-1}(n-3)!}{(2-3x)^n \ln 2}\left[(n-1)(n-2)(2+3x)^2 + 2n(n-2)(2+3x)(2-3x) + n(n-1)(2-3x)^2\right].$$

4. ④ $y = 27 + 27\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(\ln 3)^k}{k!}\left[1 - \frac{k}{\ln 3}\right](x-2)^{2k} + o((x-2)^{2n+1})$.

5a). ⑤

$y'(x) = \dfrac{x(x^2-6x-16)}{2(x-2)^3}$,

$y''(x) = \dfrac{4(7x+4)}{(x-2)^4}$;

$x_{\substack{\cancel{\max}\\ \min}} = 0$, $y_{\substack{\cancel{\max}\\ \min}} = 0$;

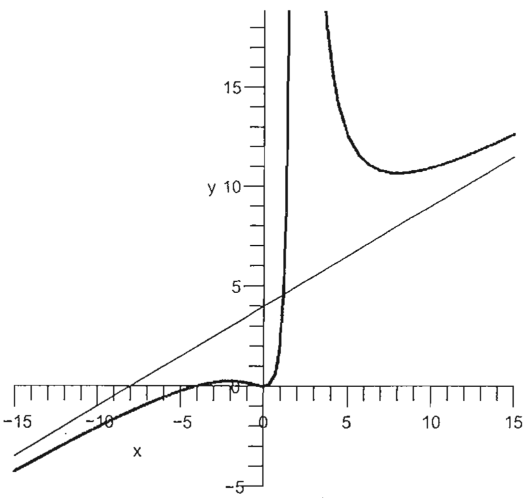
$x_{\substack{\cancel{\max}\\ \min}} = 8$, $y_{\substack{\cancel{\max}\\ \min}} = \dfrac{32}{3}$;

$x_{\substack{\cancel{\min}\\ \max}} = -2$, $y_{\substack{\cancel{\min}\\ \max}} = \dfrac{1}{4}$;

точка перегиба $\left(-\dfrac{4}{7}; \dfrac{16}{189}\right)$; $\quad K = -\dfrac{50}{243}$

вертикальная асимптота: $x = 2$;

наклонная асимптота: $y = \dfrac{x}{2} + 4$.



5b). ⑥

при $x \geqslant 3$: $y'(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{3x-1}{(x-3)^{2/3}(x+5)^{1/3}}$;

$y''(x) = -\dfrac{128}{9}\,\dfrac{1}{(x-3)^{5/3}(x+5)^{4/3}}$;

при $x \leqslant 3$: $y'(x) = -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{3x-1}{(3-x)^{2/3}(x+5)^{1/3}}$;

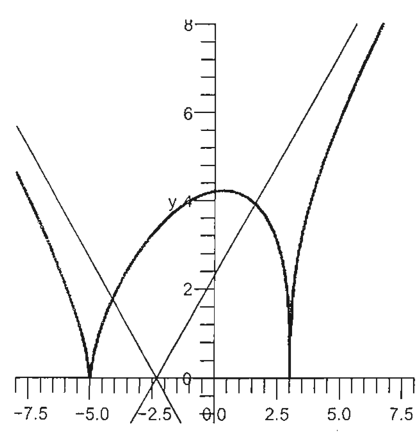
$y''(x) = -\dfrac{128}{9}\,\dfrac{1}{(3-x)^{5/3}(x+5)^{4/3}}$;

$x_{\min} = -5$, $y_{\min} = 0$; $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = 0$;

$x_{\max} = \dfrac{1}{3}$, $y_{\max} = \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{3} \approx 4.2$;

наклонные асимптоты: $y = x + \dfrac{7}{3}$, $x \to +\infty$;

$y = -x - \dfrac{7}{3}$, $x \to -\infty$;



6. ⑤ Числитель: $-\dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$. Знаменатель: $-x^3 + o(x^3)$. Ответ: $\dfrac{1}{16}$.

7. ⑥ Степень: $\dfrac{1}{-6x^2 + o(x^2)}$. Основание: $\dfrac{2x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = 1 + 6x^3 + o(x^2)$. Ответ: e^{-1}.

8. ⑧

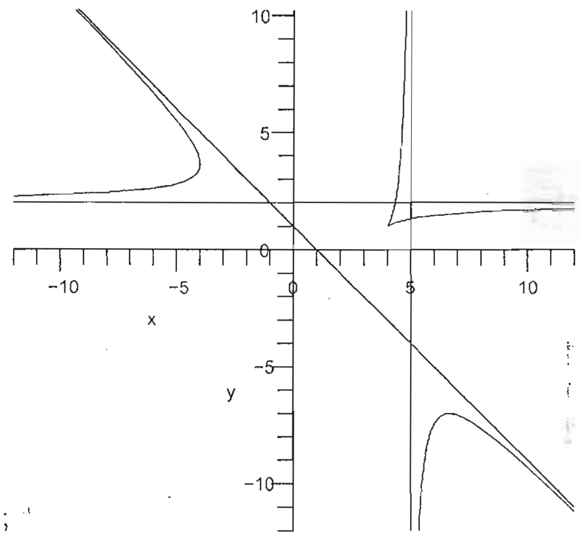
$\dot{x}(t) = -\dfrac{t(t+4)}{(t+2)^2}$;

$\dot{y}(t) = \dfrac{(t+4)(t+8)}{(t+6)^2}$;

$y'_x = -\dfrac{(t+8)(t+2)^2}{t(t+6)^2}$;

$y''_{xx} = -\dfrac{96(t+2)^3}{t^3(t+4)(t+6)^3}$;

$(y'_x)'_t = \dfrac{96(t+2)}{(t+6)^3 t^2}$



$x = 5$ — вертикальная асимптота $t \to -6$;
$y = 2$ — горизонтальная асимптота $t \to -2$;
$y = 1 - x$ — наклонная асимптота $t \to \pm\infty$;

$A(4, 1)$ — точка возврата при $t = -4$, $y'_x(-4) = 1$;
$B\left(\dfrac{20}{3}, -7\right)$ — точка локального максимума при $t = -8$;
$C\left(-4, \dfrac{11}{3}\right)$ — точка с вертикальной касательной при $t = 0$.

9. ⑥ Последовательность периодическая, $x_{2010} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{a - a^2}$.

Вариант 4

1. ③ $k(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{2}}$, $\quad x_{\max} = 0, \quad k_{\max} = \dfrac{1}{2}$.

2a). ⑤ $\dfrac{x^3+3x^2+62x-18}{x(3x-1)(x^2+9)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{1-2x}{x^2+9}$;

$$\int \frac{x^3+3x^2+62x-18}{x(3x-1)(x^2+9)}\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|3x-1| - \ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + C.$$

2b). ④ $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$

3. ③

$$y^{(n)}(x) = \frac{6^{n-2}}{2}\left[-6^2(4-3x)^2\cos\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right) + 6^2 n(4-3x)\sin\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right) + 9n(n-1)\cos\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right)\right].$$

4. ④ $\displaystyle y = \frac{1}{\ln 2}\left[-\ln 6 - \left(\ln 6 - \frac{1}{6}\right)t + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(-1)^k(3k-1)}{2^k} - \frac{2k+1}{3^k}\right)\frac{(x+2)^k}{k(k-1)}\right] + o((x+2)^n).$

5a). ⑤

$y'(x) = \dfrac{2x(x^2-3x-4)}{(x-1)^3}$;

$y''(x) = \dfrac{4(7x+2)}{(x-1)^4}$;

$x_{\min} = 0$, $y_{\min} = 0$;

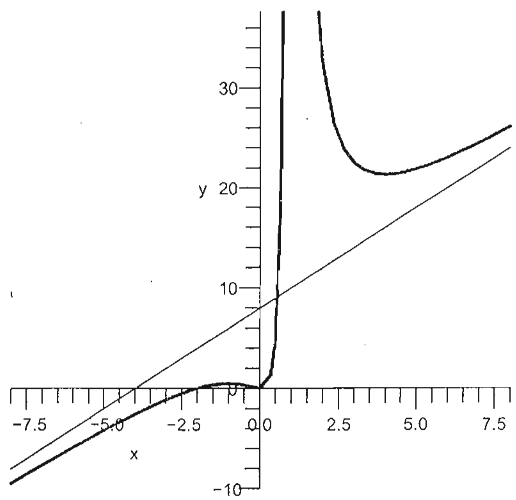
$x_{\min} = 4$, $y_{\min} = \dfrac{64}{3}$;

$x_{\max} = -1$, $y_{\min} = \dfrac{1}{2}$;

точка перегиба $\left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{32}{189}\right)$;

вертикальная асимптота: $x = 1$;

наклонная асимптота: $y = 2x + 8$.



5b). ⑥

при $x \geqslant 2$: $y'(x) = \dfrac{x}{(x-2)^{2/3}(x+4)^{1/3}}$;

$y''(x) = -\dfrac{8}{(x-2)^{5/3}(x+4)^{4/3}}$;

при $x \leqslant 2$: $y'(x) = -\dfrac{x}{(2-x)^{2/3}(x+4)^{1/3}}$;

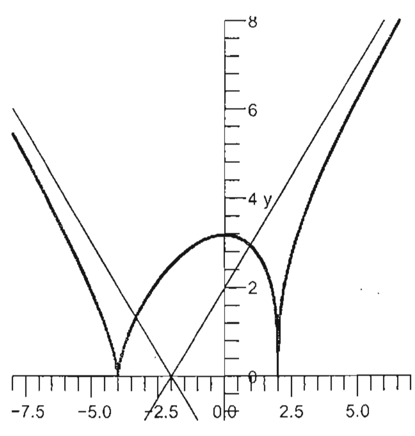
$y''(x) = -\dfrac{8}{(2-x)^{5/3}(x+4)^{4/3}}$;

$x_{\min} = -4$, $y_{\min} = 0$; $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$x_{\max} = 0$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{4} \approx 3.2$;

наклонные асимптоты: $y = x + 2$, $x \to +\infty$;

$y = -x - 2$, $x \to -\infty$.



6. ⑤ Числитель: $-\dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$. Знаменатель: $-x^3 + o(x^3)$. Ответ: $\dfrac{1}{8}$.

7. ⑥ Степень: $\dfrac{1}{2x^2 + o(x^2)}$. Основание: $\dfrac{2x^2 + \dfrac{8}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^2 + \dfrac{20}{3}x^4 + o(x^4)} = 1 - 2x^2 + o(x^2)$. Ответ: e^{-1}.

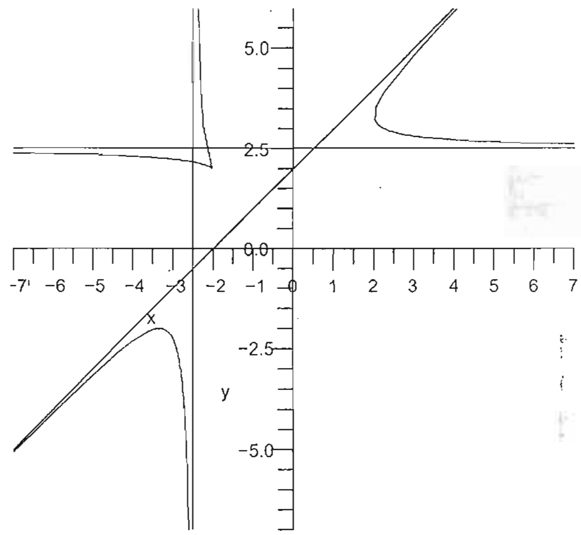
8. ⑧

$\dot{x}(t) = -\dfrac{t^2-1}{t^2}$;

$\dot{y}(t) = -\dfrac{(t-3)(t-1)}{(t-2)^2}$;

$y'_x = \dfrac{t^2(t-3)}{(t+1)(t-2)^2}$;

$y''_{xx} = -\dfrac{12t^3}{(t+1)^3(t-2)^3(t-1)}$.



$x = -\dfrac{5}{2}$ — вертикальная асимптота $t \to 2$;

$y = \dfrac{5}{2}$ — горизонтальная асимптота $t \to 0$;

$y = x + 2$ — наклонная асимптота $t \to \pm\infty$.

$A(-2, 2)$ — точка возврата при $t = 1$, $y'_x(1) = -1$;

$B\left(-\dfrac{10}{3}, -2\right)$ — точка локального максимума при $t = 3$;

$C\left(2, \dfrac{10}{3}\right)$ — точка с вертикальной касательной при $t = -1$.

9. ⑥ Последовательность периодическая, $x_{2010} = \dfrac{1+\pi}{e}$.