1. а) ④ $J=\int\left(1-\frac{3}{7}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{7}\frac{2x+3}{x^2+x+1}\right)dx=$
$=x-\frac{3}{14}\ln|2x-1|-\frac{4}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{7}\ln\left(x^2+x+1\right)+C$;

б) ⑤ $J=-\int\frac{tdt}{\cos t}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\ln\sqrt{1-x^2}+C; x=\sin t$.

---

2. ③ $y^{(n)}=x^2\cdot(5x+7)^{-2/3-n}\cdot 5^n\cdot n!\cdot C^n_{-2/3}+$
$+2x\cdot n\cdot(5x+7)^{1/3-n}\cdot 5^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot C^{n-1}_{-2/3}+$
$+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot(5x+7)^{4/3-n}\cdot 5^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot C^{n-2}_{-2/3}$, где $C^k_{-2/3}=\frac{1}{k!}\left(-\frac{2}{3}\right)\ldots\left(-\frac{2}{3}-k+1\right)$.

---

3. ⑤ $x+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{C^k_{-1/2}}{2k+1}-\frac{C^{k-1}_{-1/2}}{2k-1}\right)x^{2k+1}+o\left((x)^{2n}\right)$.

---

4. ② $k=\frac{|\operatorname{sh}(t/2)|}{2\left(1+\operatorname{ch}^2(t/2)\right)^{3/2}}=\frac{|\operatorname{sh}(t/2)|}{2\left(2+\operatorname{sh}^2(t/2)\right)^{3/2}}$.

---

5. ④ $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=\frac{5}{2}$.

---

6. ⑥ $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^5+o\left(x^5\right)\right)-\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{37}{120}x^5+o\left(x^5\right)\right)\right)^{\frac{1}{x^5+o\left(x^5\right)}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right)\right)^{\frac{1}{x^5+o\left(x^5\right)}}=e^{1/15}$.

---

7. а) ④ $y=2-x-\frac{3x-5}{(x-2)^2}$; $y'=-\frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$; $y''=-6\frac{x-1}{(x-2)^4}$; $y=2-x$ - наклонная асимптота; $x=2$ - вертикальная асимптота; $A(4;-\frac{15}{4})$ - точка локального максимума; $B(1;3)$ - точка перегиба с горизонтальной касательной;

б) ⑤ $y'=\frac{2-x}{\sqrt[5]{x\,(5/2-x)^4}}$; $y''=-\frac{1}{\sqrt[5]{x^6\,(5/2-x)^9}}$; $y=-x+1/2$ - наклонная асимптота; $A(0;0)$ - точка локального минимума с вертикальными односторонними касательными; $B(2;\sqrt[5]{8})$ - точка локального максимума с горизонтальной касательной; $C(5/2;0)$ - точка перегиба с вертикальной касательной.

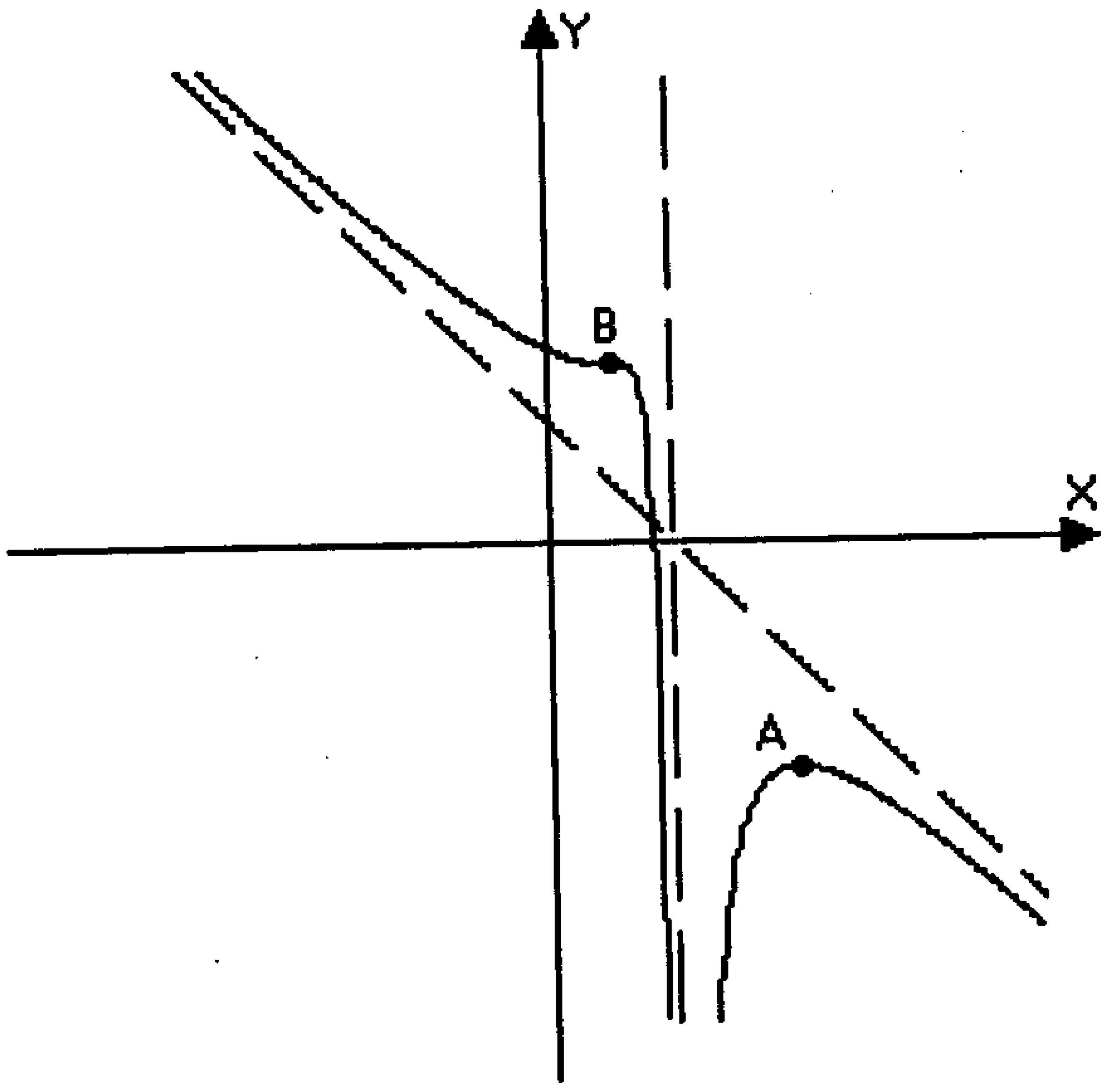
---

8. ⑧ $x'_t=\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$; $y'_t=\frac{(t-2)(t+2)}{2t^2}$; $y'_x=\frac{(t+1)^2(t-2)}{2t^3}$; $y''_{xx}=\frac{3(t+1)^3}{t^5(t+2)}$; $y=x/2+1/2$ - асимптота при $t\to\pm\infty$; $x=0$ - вертикальная асимптота при $t\to\pm 0$; $y=-5/2$ - асимптота при $t\to -1$; $A(4/3;2)$ при $t=2$ - точка локального минимума, $y'(2)=0$; $B(-4;-2)$ при $t=-2$ - точка возврата, $y'(-2)=1/4$.

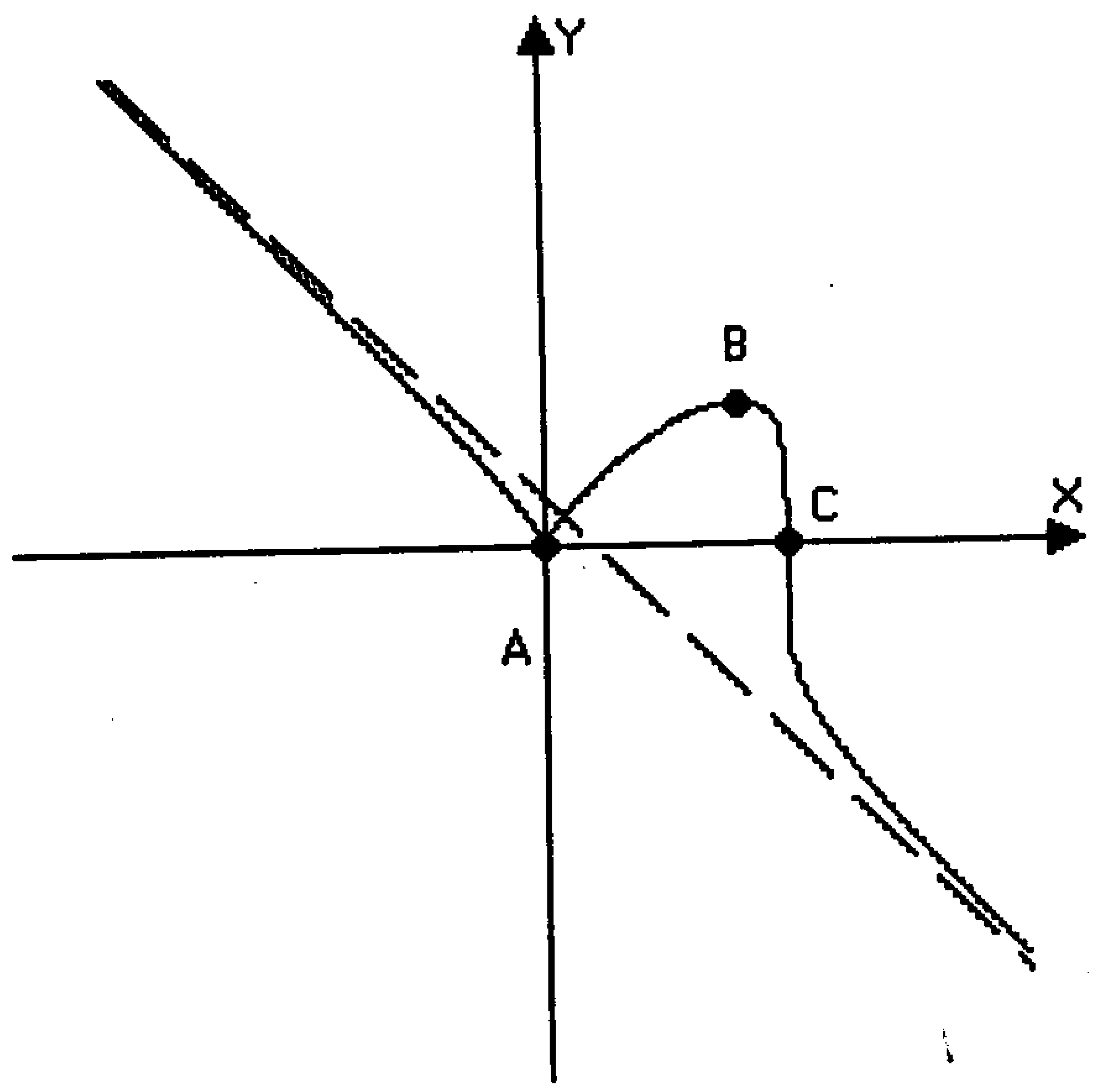
---

9. ④ 8.

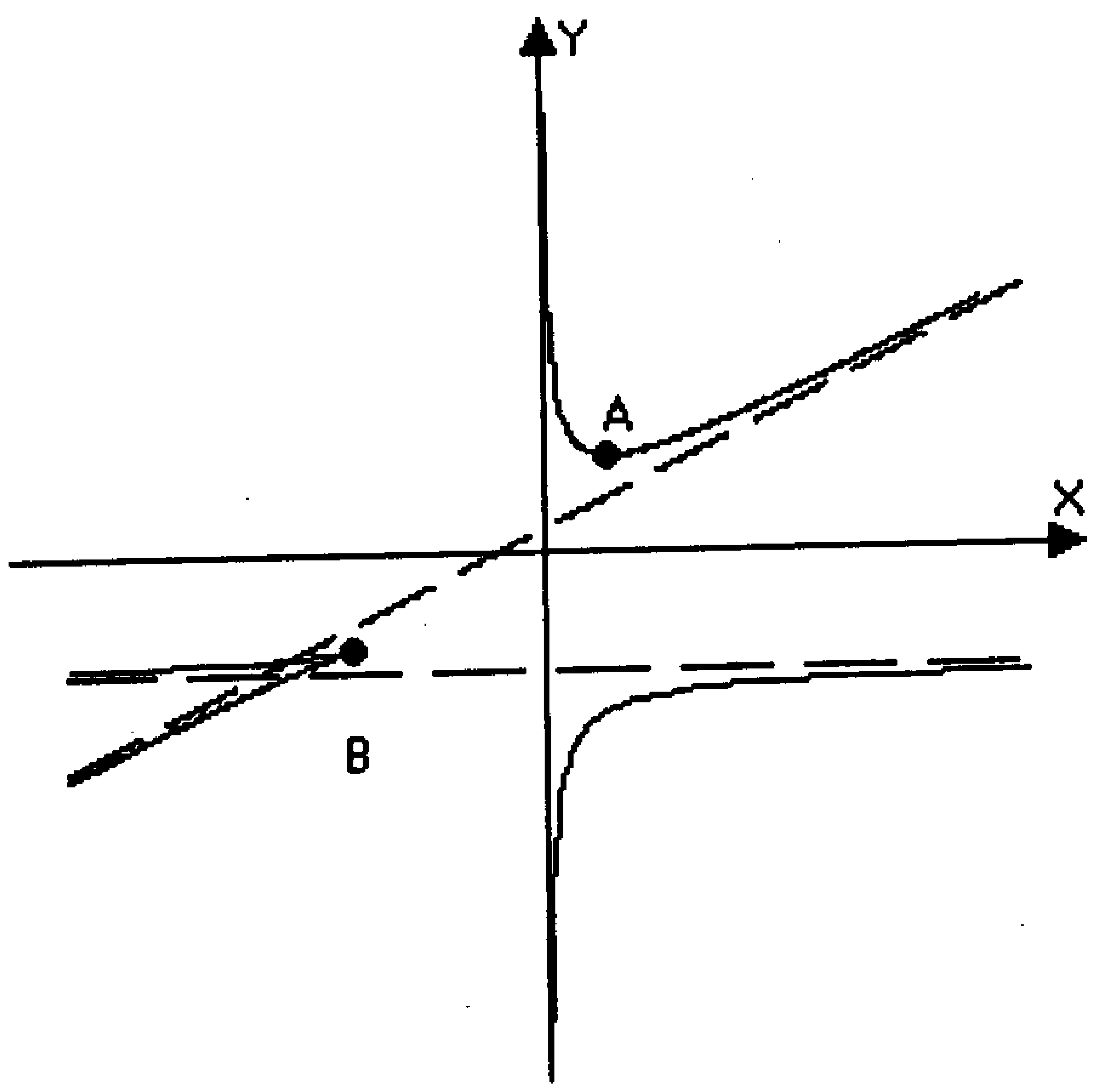
Вариант 1. К задаче 7а



К задаче 7б



К задаче 8



Ответы. Матанализ 1 курс, 1 семестр, 2008/2009 г. **Вариант (82)**

1. а) ④ $J=\int\left(1-\frac{1}{5}\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}\frac{12x+8}{x^2+2x+2}\right)dx=$

$=x-\frac{1}{10}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{4}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{6}{5}\ln\left(x^2+2x+2\right)+C;$

б) ⑤ $J=\int\arcsin^2 xdx=\int t^2\cos tdt=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C;x=\sin t.$

---

2. ③ $y^{(n)}=\frac{2}{3}\cdot x^2\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(3+2x)^n}+$

$+n\cdot\frac{2}{3}\cdot 2x\cdot\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!2^{n-1}}{(3+2x)^{n-1}}+$

$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!2^{n-2}}{(3+2x)^{n-2}}.$

---

3. ⑤ $x+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{C_{-1/2}^{k}}{2k+1}-\frac{C_{-1/2}^{k-1}}{2k-1}\right)x^{2k+1}+o\left((x)^{2n}\right).$

---

4. ② $k=\frac{|x|}{\left(x^2+4\right)^{3/2}}.$

---

5. ④ $L=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=\frac{1}{2}.$

---

6. ⑥ $L=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^5+o\left(x^5\right)\right)-\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{37}{120}x^5+o\left(x^5\right)\right)\right)^{\frac{1}{-x^5/6+o(x^5)}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right)\right)^{\frac{1}{-x^5/6+o(x^5)}}=e^{-2/5}.$

---

7. а) ④ $y=x+1+\frac{8x-4}{(x-1)^2}$; $y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$; $y''=24\frac{x+1}{(x-1)^4}$; $y=x+1$ - наклонная асимптота; $x=1$ - вертикальная асимптота; $A(5;\frac{19}{2})$ - точка локального минимума; $B(-1;-4)$ - точка перегиба с горизонтальной касательной;

б) ⑤ $y'=\frac{x+1}{\sqrt[3]{x\left(x+3/2\right)^2}}$; $y''=-\frac{1}{2\sqrt[3]{x^4\left(x+3/2\right)^5}}$; $y=x+1/2$ - наклонная асимптота; $A(0;0)$ - точка локального минимума с вертикальными односторонними касательными; $B(-1;1/\sqrt[3]{2})$ - точка локального максимума с горизонтальной касательной; $C(-3/2;0)$ - точка перегиба с вертикальной касательной.

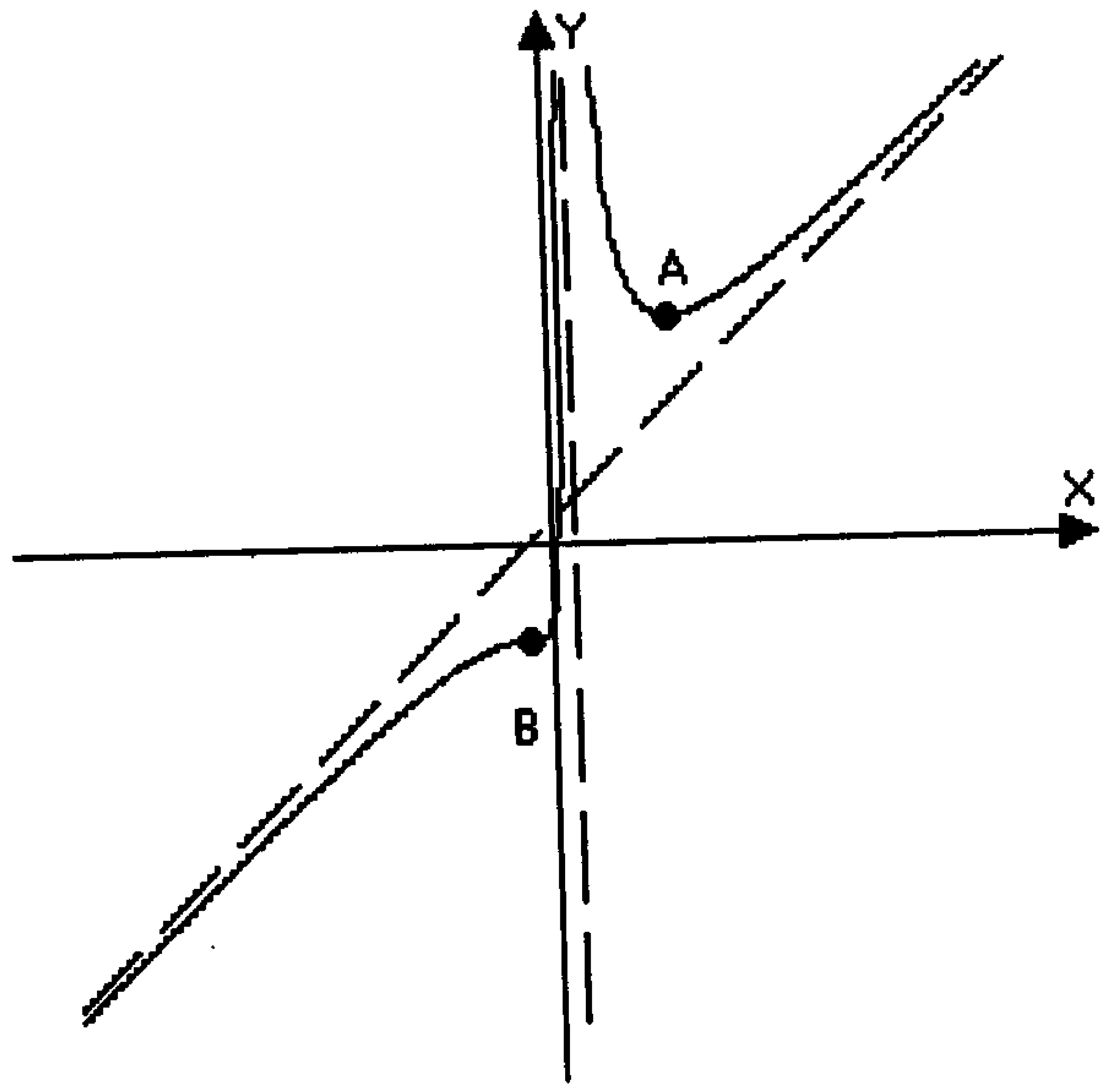
---

8. ⑧ $x'_t=\frac{1-4t^2}{2t^2}$; $y'_t=-\frac{2t+1}{t^2(t+1)^2}$; $y'_x=\frac{2}{(2t-1)(t+1)^2}$; $y''_{xx}=\frac{24t^3}{(2t-1)^3(2t+1)(t+1)^3}$; $y=0$ - асимптота при $t\to\pm\infty$; $x=5/2$ - вертикальная асимптота при $t\to-1$; $y=-2x-1$ - асимптота при $t\to\pm0$; $A(-2;4/3)$ при $t=1/2$ - точка локального максимума функции $x=x(y)$; $B(2;-4)$ при $t=-1/2$ - точка возврата, $y'(-1/2)=-4$.

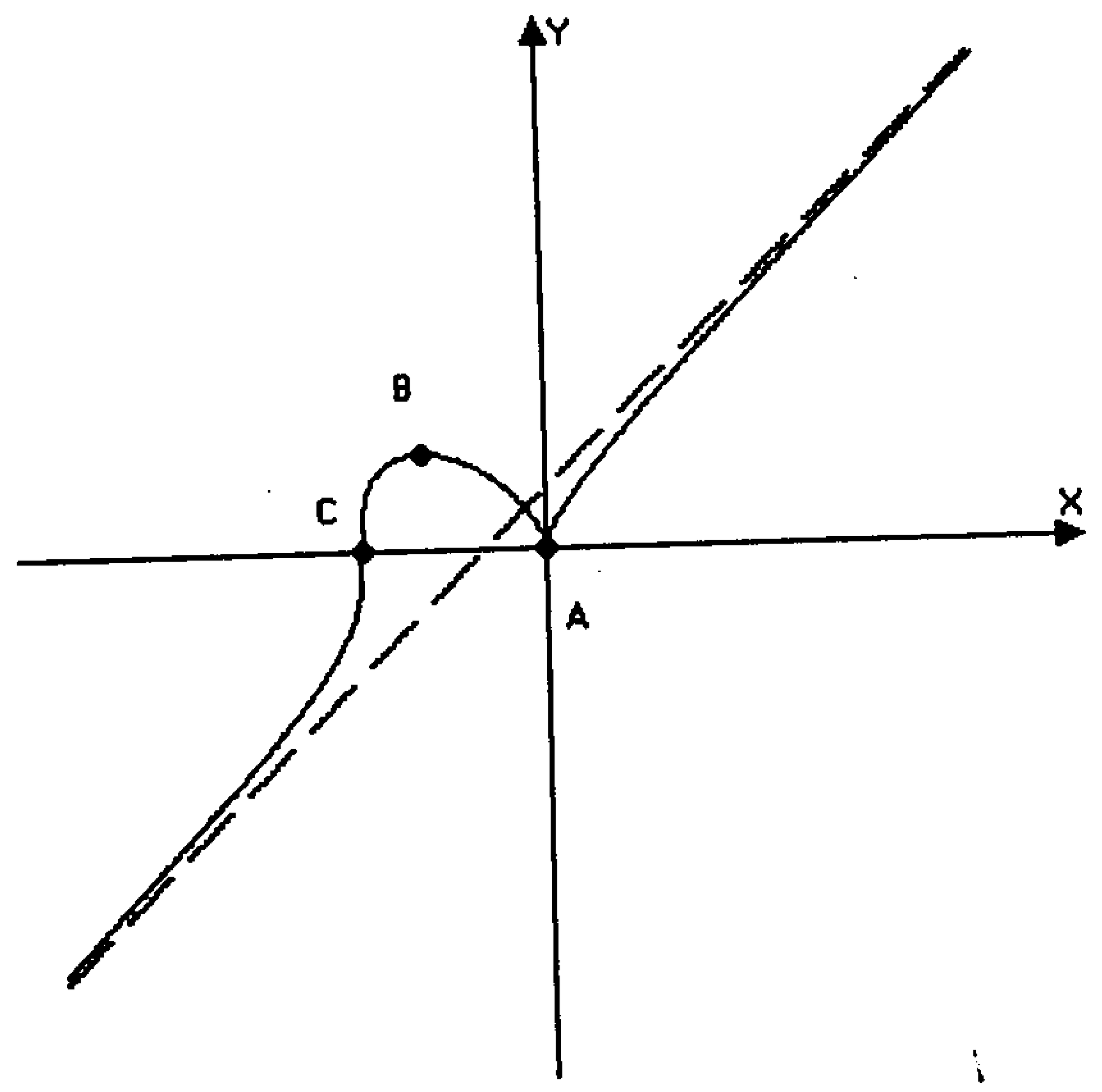
---

9. ④ 2.

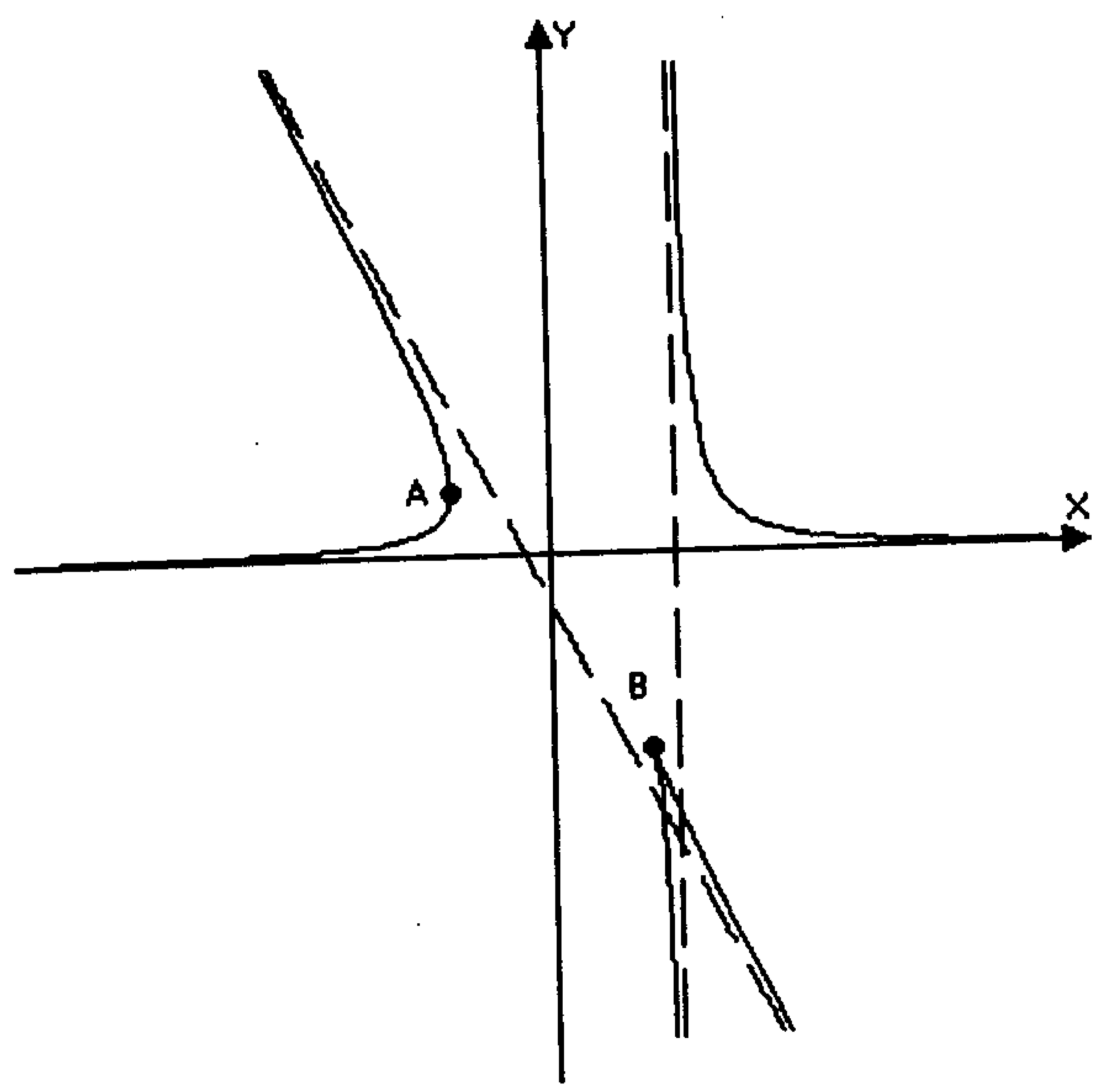
Вариант 2. К задаче 7а



К задаче 7б



К задаче 8



1. а) ④ $J = \int \left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{2x+1}{2x^2+x+1}\right) dx =$
$= x + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{8}\ln\left(2x^2+x+1\right) + C;$

б) ⑤ $J = \frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + C = \frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right| + C.$

---

2. ③ $y^{(n)} = x^2\cdot(3x+1)^{-3/5-n}\cdot 3^n\cdot n!\cdot C^n_{-3/5}+$
$+2x\cdot n\cdot(3x+1)^{2/5-n}\cdot 3^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot C^{n-1}_{-3/5}+$
$+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot(3x+1)^{7/5-n}\cdot 3^{n-2}\cdot(n-2)!\cdot C^{n-2}_{-3/5}$, где $C^k_{-3/5} = \frac{1}{k!}\left(-\frac{3}{5}\right)\ldots\left(-\frac{3}{5}-k+1\right).$

---

3. ⑤ $-x - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{C^k_{-1/2}}{2k+1} + \frac{C^{k-1}_{-1/2}}{2k-1}\right)x^{2k+1} + o\left((x)^{2n}\right).$

---

4. ② $k = \frac{|\operatorname{sh} t|}{\left(1+\operatorname{ch}^2 t\right)^{3/2}} = \frac{|\operatorname{sh} t|}{\left(2+\operatorname{sh}^2 t\right)^{3/2}}.$

---

5. ④ $L = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{\left(-x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{2}.$

---

6. ⑥ $L = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5+o\left(x^5\right)\right)+\left(x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+o\left(x^5\right)\right)-2x\right)^{\frac{1}{x^5/2+o\left(x^5\right)}} =$
$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{60}x^5+o\left(x^5\right)\right)^{\frac{1}{x^5/2+o\left(x^5\right)}} = e^{1/30}.$

---

7. а) ④ $y = -2x+11-\frac{6x-20}{(x-3)^2}$; $y' = -2\frac{(x-4)^2(x-1)}{(x-3)^3}$; $y'' = -12\frac{x-4}{(x-3)^4}$; $y=-2x+11$ - наклонная асимптота; $x=3$ - вертикальная асимптота; $A(1;\frac{25}{2})$ - точка локального минимума; $B(4;-1)$ - точка перегиба с горизонтальной касательной;

б) ⑤ $y' = \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4\,(x-5)}}$; $y'' = -\frac{4}{\sqrt[5]{x^9\,(x-5)^6}}$; $y = x-4$ - наклонная асимптота; $A(5;0)$ - точка локального минимума с вертикальными односторонними касательными; $B(1;2\sqrt[5]{8})$ - точка локального максимума с горизонтальной касательной; $C(0;0)$ - точка перегиба с вертикальной касательной.

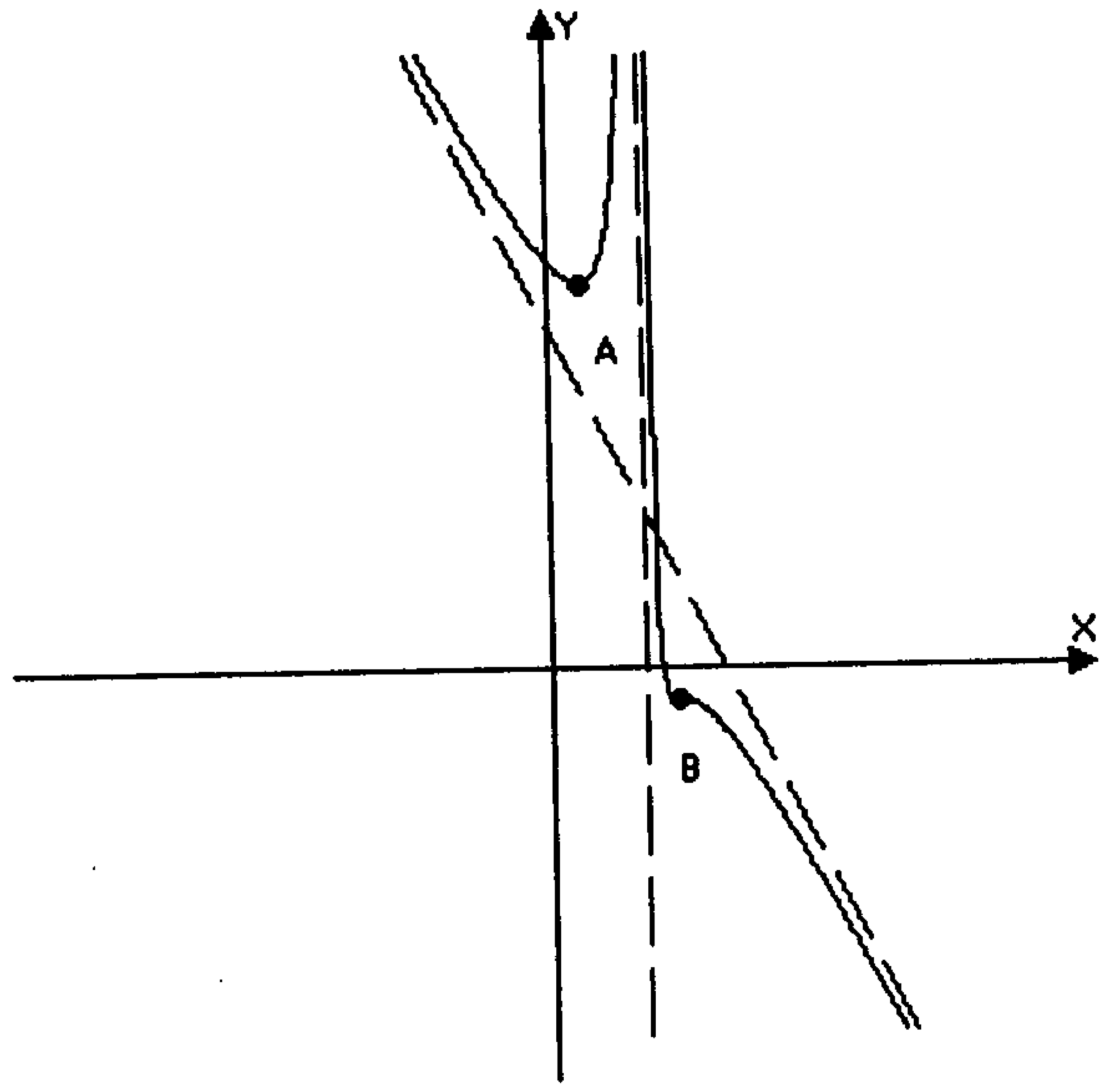
---

8. ⑧ $x'_t = \frac{t^2-4}{t^2}$; $y'_t = \frac{t(2-t)}{(1-t)^2}$; $y'_x = -\frac{t^3}{(t+2)(1-t)^2}$; $y''_{xx} = \frac{6t^4}{(t+2)^3(t-1)^3(t-2)}$; $y=-x-1$ - асимптота при $t\to\pm\infty$; $y=0$ - асимптота при $t\to\pm 0$; $x=5$ - вертикальная асимптота при $t\to 1$; $A(-4;4/3)$ при $t=-2$ - точка локального максимума функции $x=x(y)$; $B(4;-4)$ при $t=2$ - точка возврата, $y'(-1/2)=-2$.

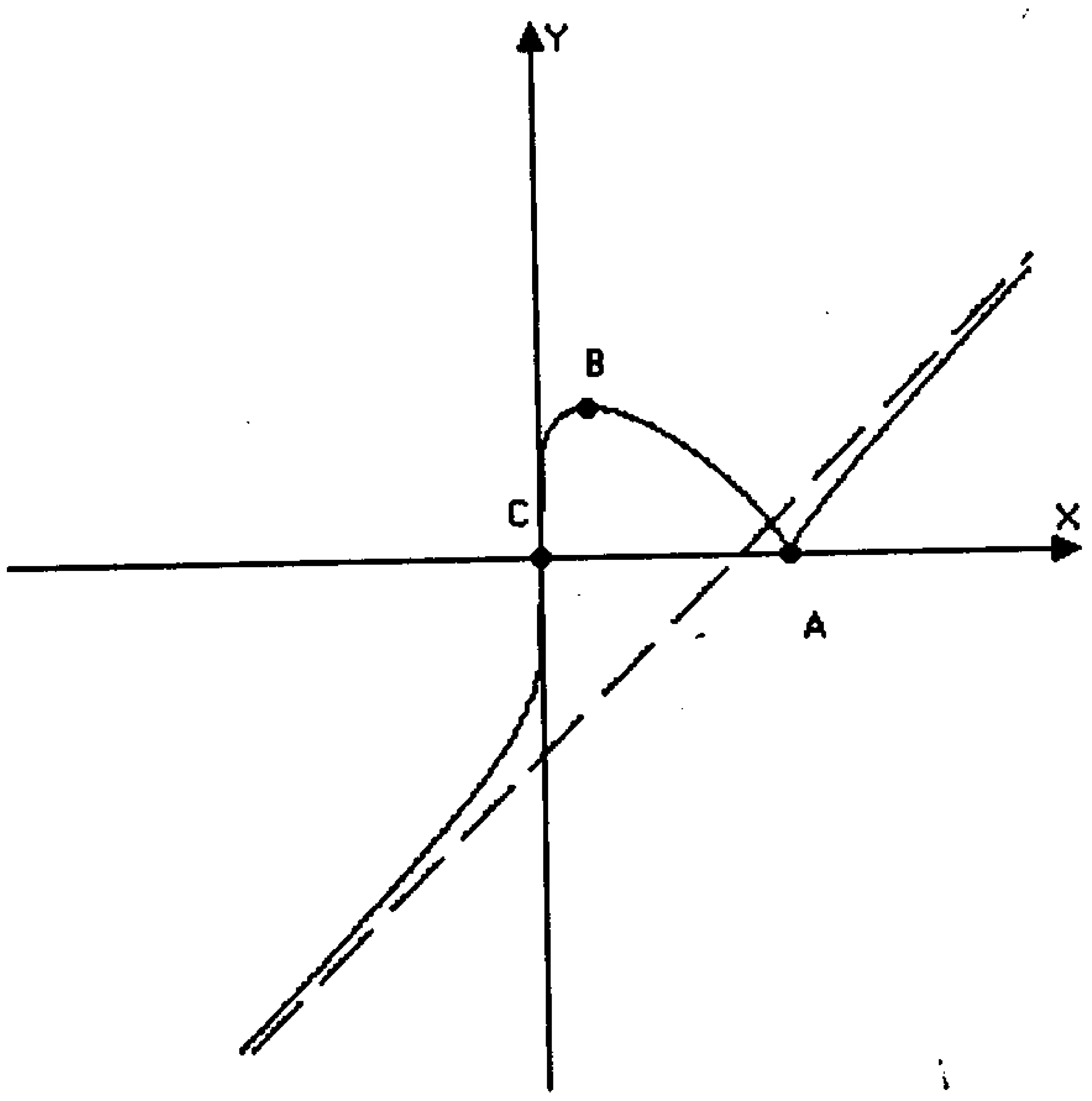
---

9. ④ 4.

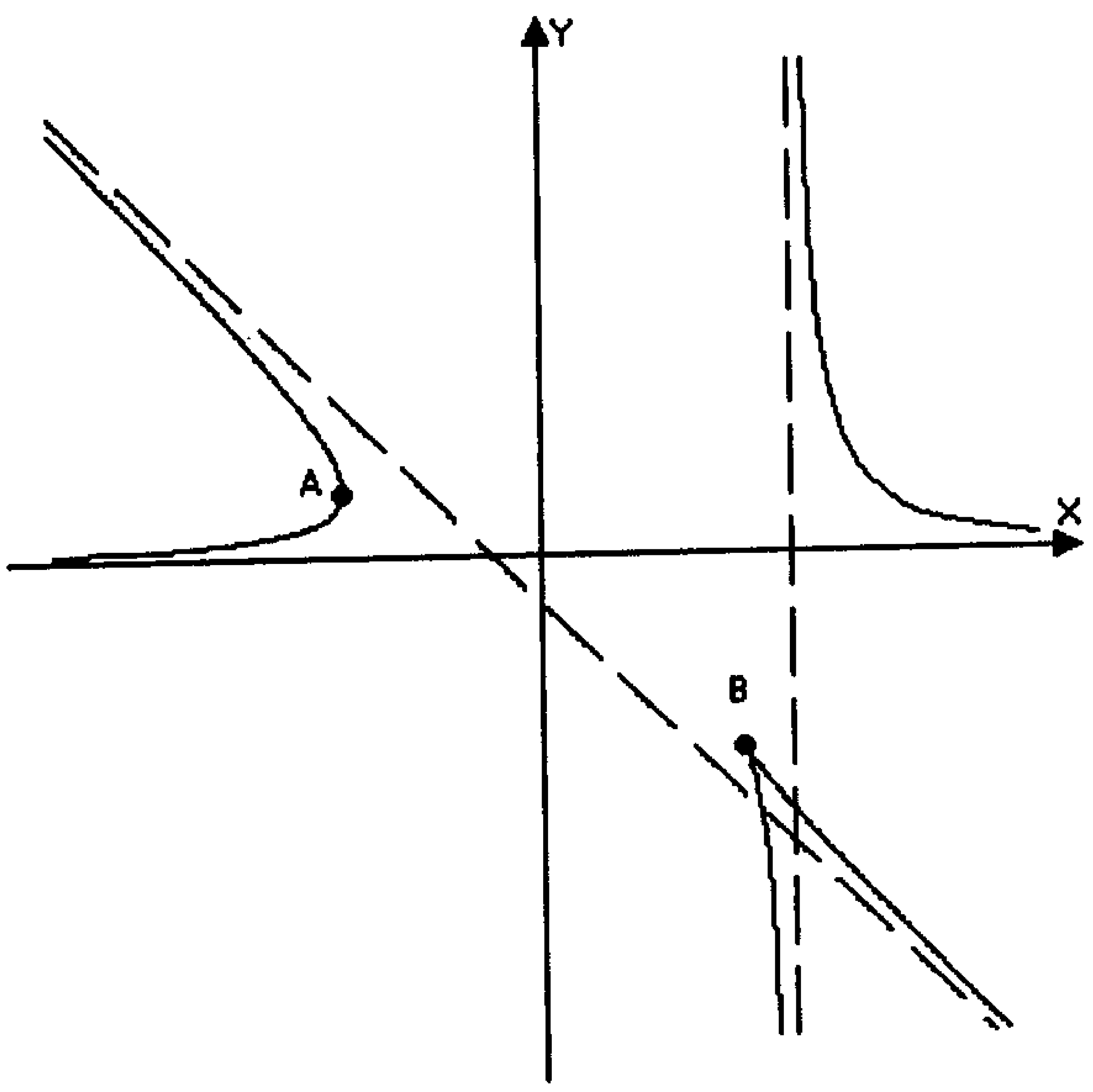
Вариант 3. К задаче 7а



К задаче 7б



К задаче 8



1. а) ④ $J=\int\left(1+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{5}\frac{12x-8}{x^2-2x+2}\right)dx=$

$=x+\frac{1}{10}\ln|2x-1|+\frac{4}{5}\operatorname{arctg}(x-1)+\frac{6}{5}\ln\left(x^2-2x+2\right)+C$;

б) ⑤ $J=x\arcsin^2\sqrt{1-x^2}+\int\frac{2x\arcsin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin^2\sqrt{1-x^2}-$

$-2\sqrt{1-x^2}\arcsin\sqrt{1-x^2}-2x+C$.

---

2. ③ $y^{(n)}=\frac{3}{5}\cdot x^2\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!7^n}{(7x+2)^n}+$

$+n\cdot\frac{3}{5}\cdot 2x\cdot\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!7^{n-1}}{(7x+2)^{n-1}}+$

$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!7^{n-2}}{(7x+2)^{n-2}}$.

---

3. ⑤ $\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{2}x^2+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{C_{-1/2}^{k}}{2k+1}+\frac{C_{-1/2}^{k-1}}{2k-1}\right)x^{2k+1}+o\left((x)^{2n}\right)$.

---

4. ② $k=\frac{|x|}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}$.

---

5. ④ $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=-1$.

---

6. ⑥ $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5+o\left(x^5\right)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+o\left(x^5\right)\right)\right)^{\frac{1}{-x^5/2+o(x^5)}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right)\right)^{\frac{1}{-x^5/2+o(x^5)}}=e^{-2/15}$.

---

7. а) ④ $y=x-1+\frac{12x+28}{(x+3)^2}$; $y'=\frac{(x+1)^2(x+7)}{(x+3)^3}$; $y''=24\frac{x+1}{(x+3)^4}$; $y=x-1$ - наклонная асимптота; $x=-3$ - вертикальная асимптота; $A(-7;-\frac{23}{2})$ - точка локального максимума; $B(-1;2)$ - точка перегиба с горизонтальной касательной;

б) ⑤ $y'=\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2\,(x+3)}}$; $y''=-\frac{2}{\sqrt[3]{x^5\,(x-5)^4}}$; $y=x+2$ - наклонная асимптота; $A(-3;0)$ - точка локального максимума с вертикальными односторонними касательными; $B(-1;-\sqrt[3]{4})$ - точка локального минимума с горизонтальной касательной; $C(0;0)$ - точка перегиба с вертикальной касательной.

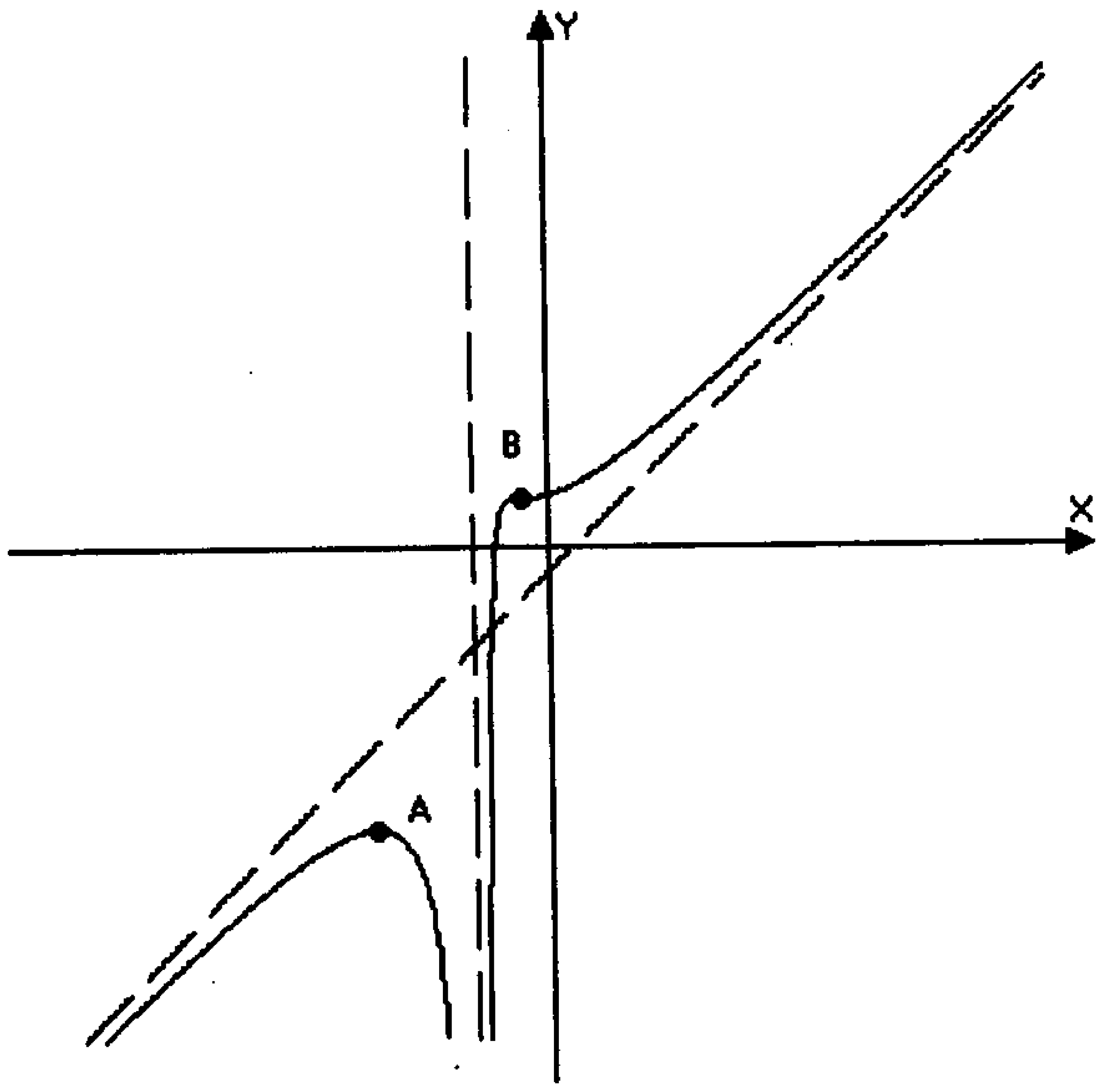
---

8. ⑧ $x'_t=-\frac{2t-1}{(t-1)^2t^2}$; $y'_t=\frac{4t^2-1}{2t^2}$; $y'_x=-\frac{(2t+1)(t-1)^2}{2}$; $y''_{xx}=\frac{3t^3(t-1)^3}{(2t-1)}$; $x=0$ - вертикальная асимптота при $t\to\pm\infty$; $y=-x/2-1/2$ - асимптота при $t\to\pm 0$; $y=5/2$ - асимптота при $t\to 1$; $A(4/3;-2)$ при $t=-1/2$ - точка локального максимума ; $B(-4;2)$ при $t=1/2$ - точка возврата, $y'(-1/2)=-1/4$.

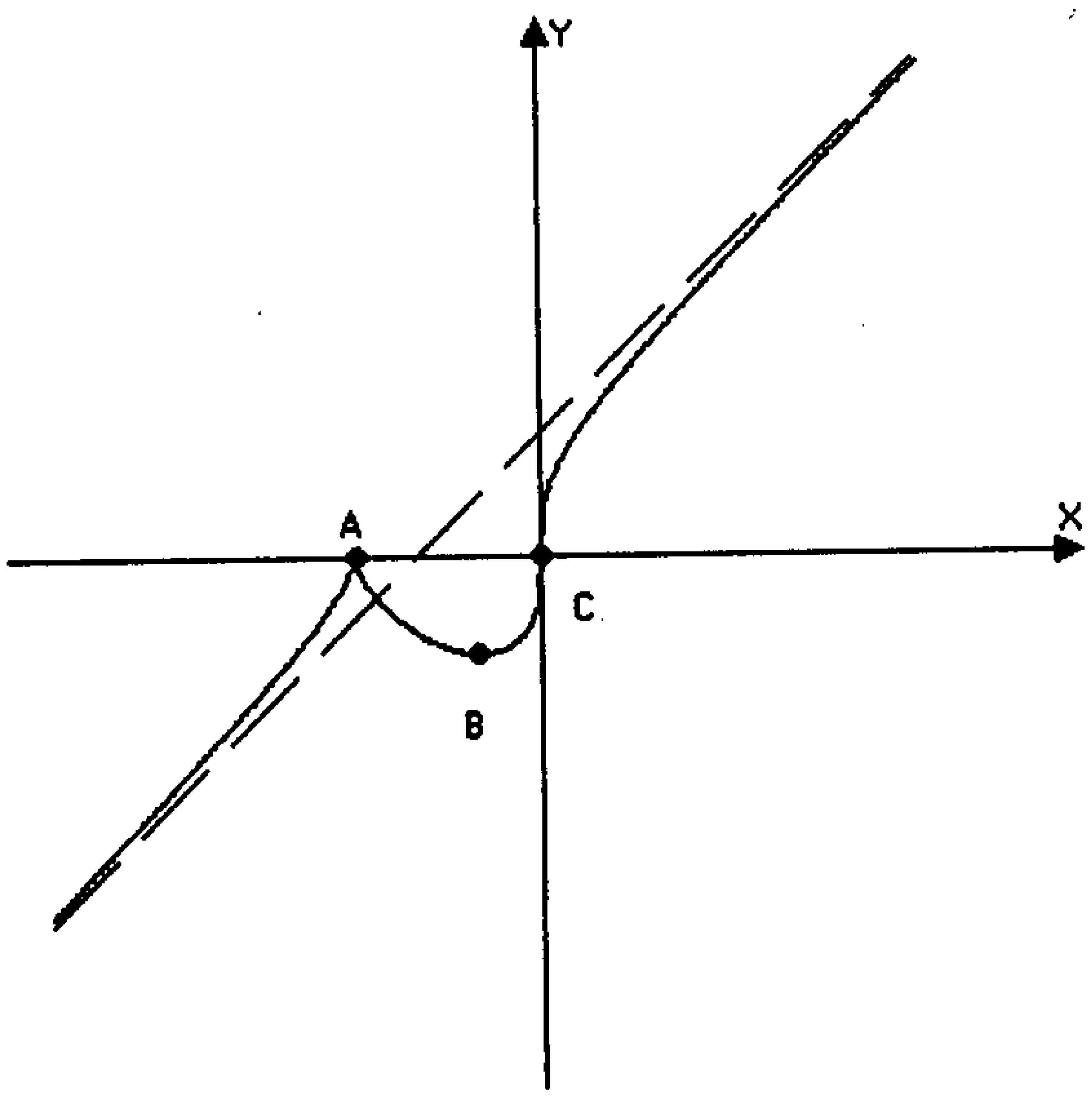
---

9. ④ 3.

Вариант 4. К задаче 7а



К задаче 7б



К задаче 8