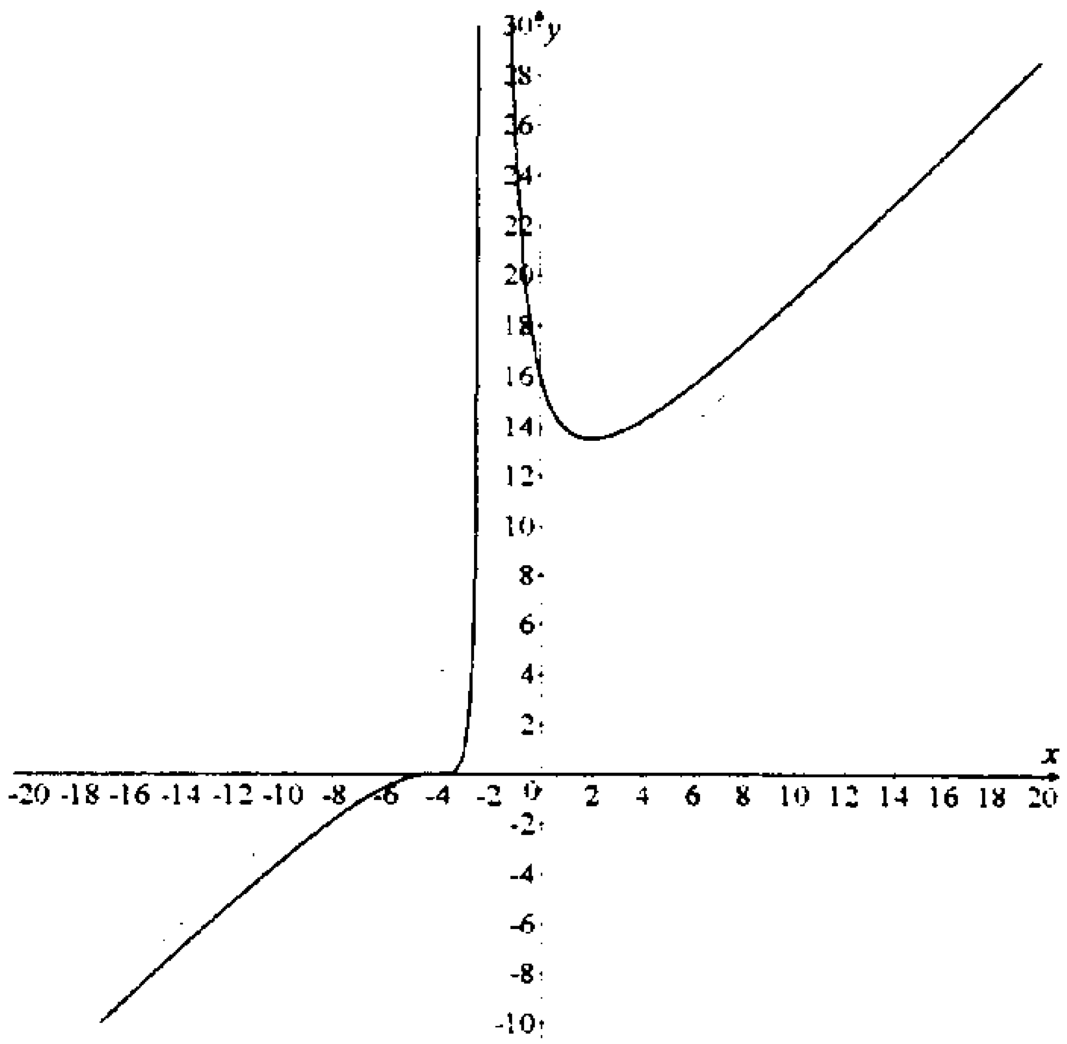
Вариант 81

1. $$\left(\left(1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{19}{6}x^3+o(x^3)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)\right)^{\frac{1}{x-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}}=$$

$$=\left(1-\frac{11}{6}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}}\to\boxed{e^{11}}$$



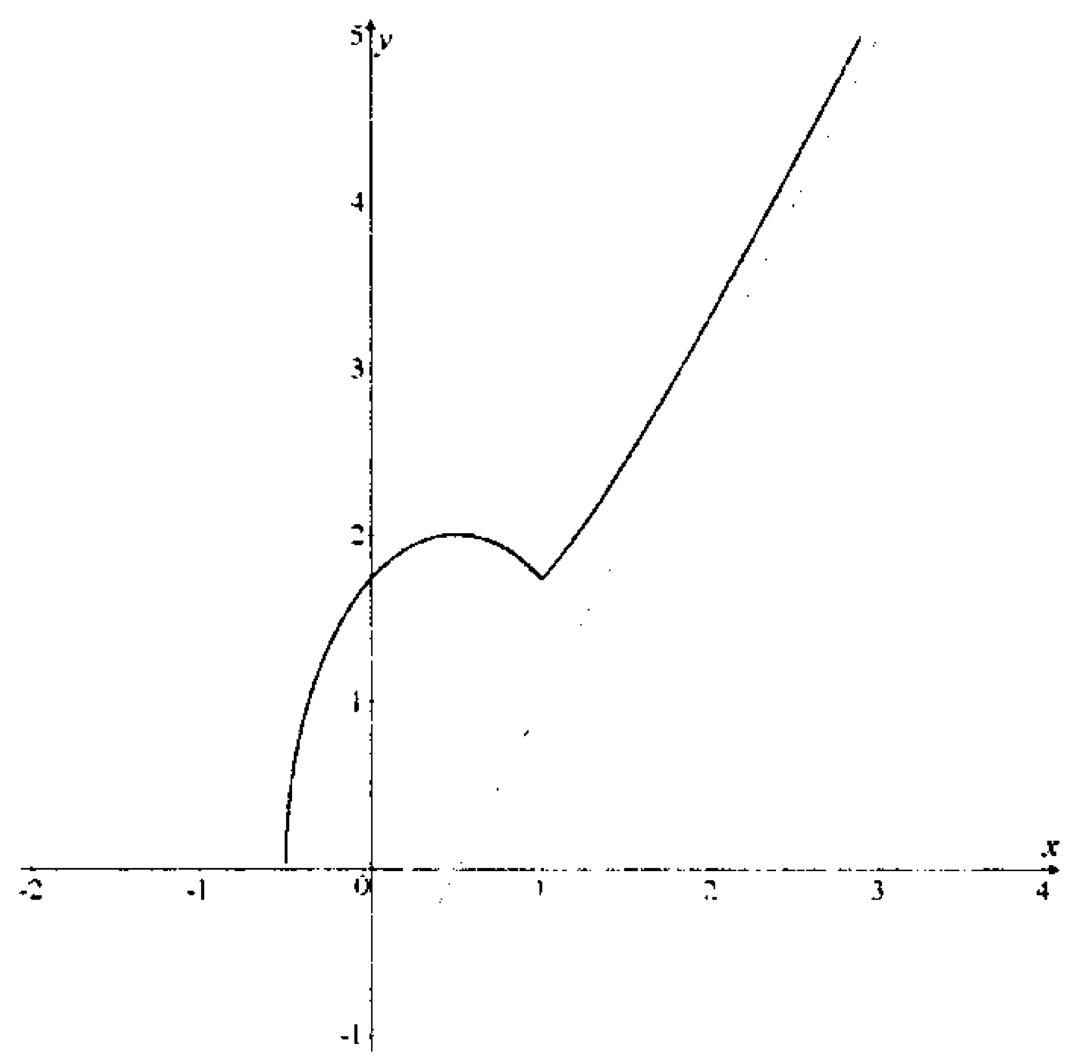
2. а) $y'=\dfrac{(x-2)(x+4)^2}{(x+2)^3}$, $\quad y''=\dfrac{24(x+4)}{(x+2)^4}$.

Асимптоты: $x=-2$, $y=x+8$.

$(-4,0)$ — перегиб через горизонтальную касательную;

$(0,16)$ — пересечение с осью Oy;

$\left(2,\frac{27}{2}\right)$ — локальный минимум.



2. б) $D=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$y'=\dfrac{2(2x-1)\cdot\operatorname{sign}(x-1)}{\sqrt{4x|x-1|+3}}$, $\quad y''=\dfrac{4(3-\operatorname{sign}(x-1))\operatorname{sign}(x-1)}{\left(\sqrt{4x|x-1|+3}\right)^3}$.

Асимптота: $y=2x-1$.

$\left(-\frac{1}{2},0\right)$ — локальный минимум, $y'\left(-\frac{1}{2}+0\right)=+\infty$;

$\left(0,\sqrt{3}\right)$ — пересечение с осью Oy;

$\left(\frac{1}{2},2\right)$ — локальный максимум, $y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;

$\left(1,\sqrt{3}\right)$ — локальный минимум, угловая точка, перемена выпуклости, $y'(1\pm0)=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

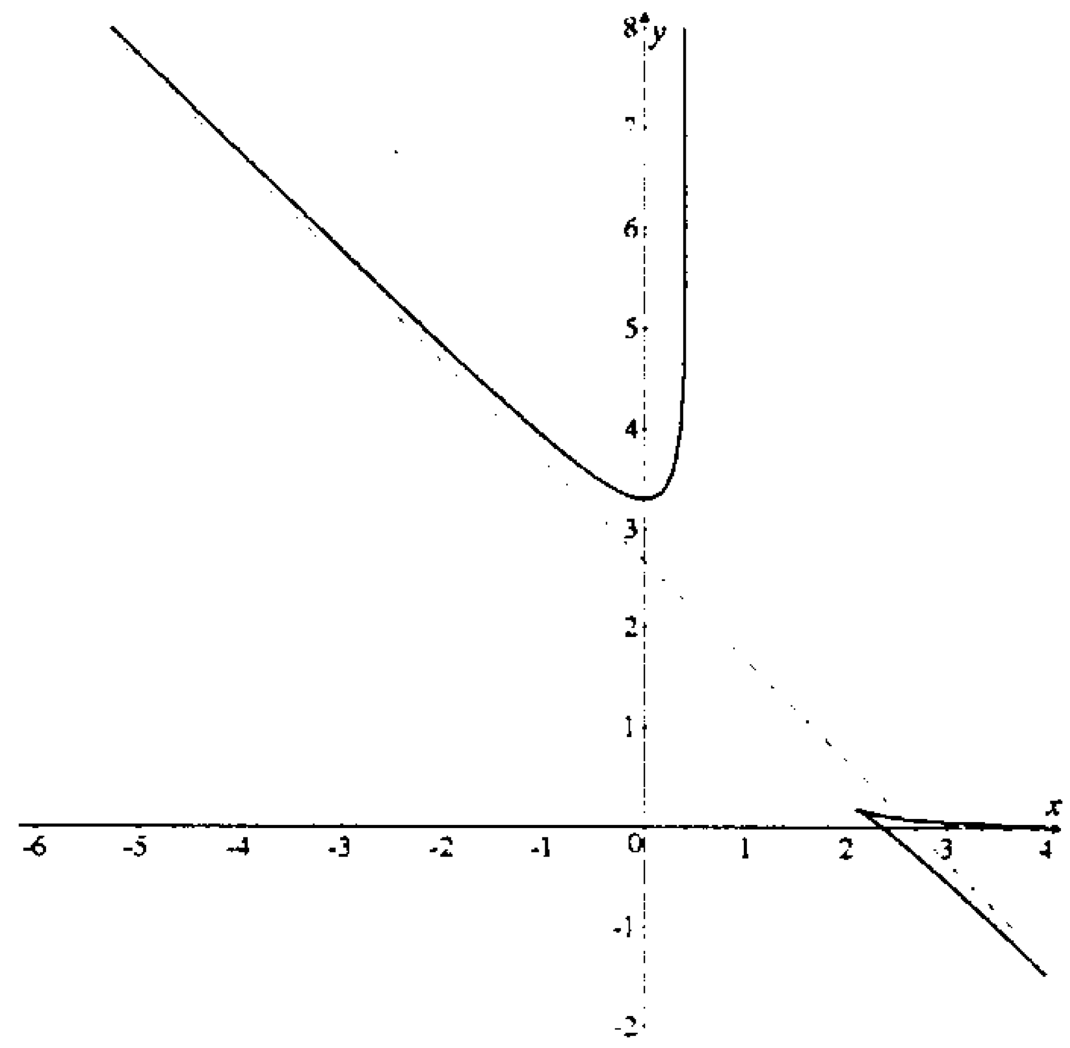
3. $$\boxed{(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{4^n}(x-2)^2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-n}+2n(-1)^n\frac{(2n-5)!!}{4^{n-1}}(x-2)\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}-n}+ +n(n-1)(-1)^{n+1}\frac{(2n-7)!!}{4^{n-2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}-n}}$$

4. $$4+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^{k+1}}{(2k)!}+\frac{4^{k-1}}{(2k-2)!}\right)(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})=$$

$$=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}(2k^2-k+8)(x-1)^{2k}+o((x-1)^{2n+1})}$$

5. $\dfrac{\left(1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+2x^2}{\left(x+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}=\dfrac{x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}\to\boxed{2}$

6. $\boxed{k=1}$ $x'_t=1,\ y'_t=0,\ x''_{tt}=-2,\ y''_{tt}=1.$



7. а) $\displaystyle\int\left(-1+\frac{3}{x+2}+\frac{x-2}{2x^2-x+2}\right)dx=$

$=\boxed{-x+3\ln|x+2|+\dfrac{1}{4}\ln(2x^2-x+2)-\dfrac{7}{2\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x-1}{\sqrt{15}}+C}$

7. б) $\boxed{40\arcsin\dfrac{x}{4}+\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x}{2}\right)\sqrt{16-x^2}+C}$

8. $x'_t=\dfrac{(t-2)(t+3)}{6t^2}e^{\frac{t}{6}},\quad y'_t=-\dfrac{(t-2)(t+1)}{2t^2}e^{-\frac{t}{2}};$

$y'_x=-3\dfrac{t+1}{t+3}e^{-\frac{2t}{3}},\quad y''_{xx}=\dfrac{12t^3(t+4)}{(t+3)^3(t-2)}e^{-\frac{5t}{6}}.$

$t\to-\infty$ — асимптота $x=0$;

$t=-4$: $\left(\dfrac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}},\dfrac{5}{4}e^2\right)$ — перегиб, $y'_x=-9e^{\frac{8}{3}}$;

$t=-3$: $\left(\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}},\dfrac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}\right)$ — локальный максимум функции $x=x(y)$;

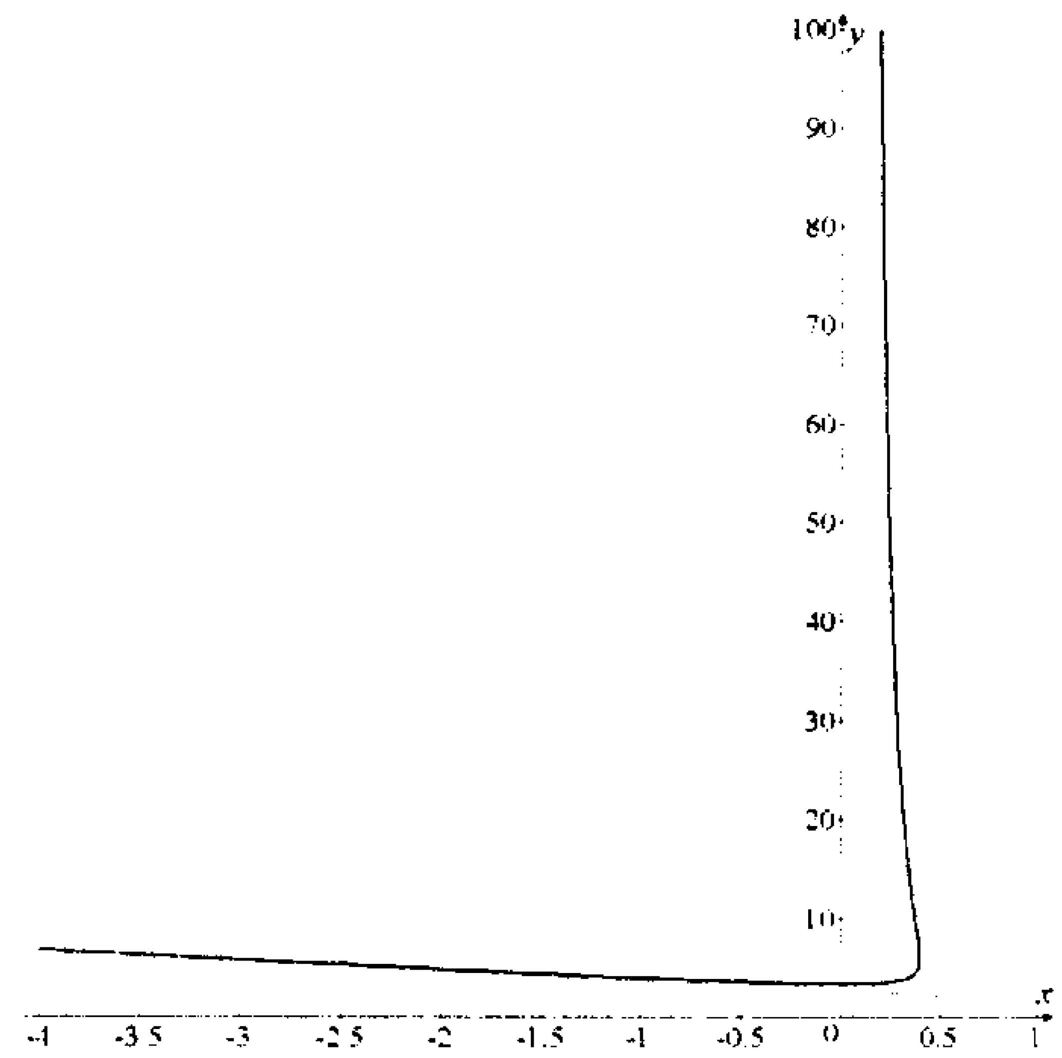
$t=-1$: $(0,2\sqrt{e})$ — локальный минимум;

$t\to\pm0$ — асимптота $y=-x+\dfrac{8}{3}$;

$t=1$: $(2\sqrt[6]{e},0)$ — пересечение с осью Ox;

$t=2$: $\left(\dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{3}},\dfrac{1}{2e}\right)$ — точка возврата, $y'_x=-\dfrac{9}{5}e^{-\frac{4}{3}}$;

$t\to+\infty$ — асимптота $y=0$.

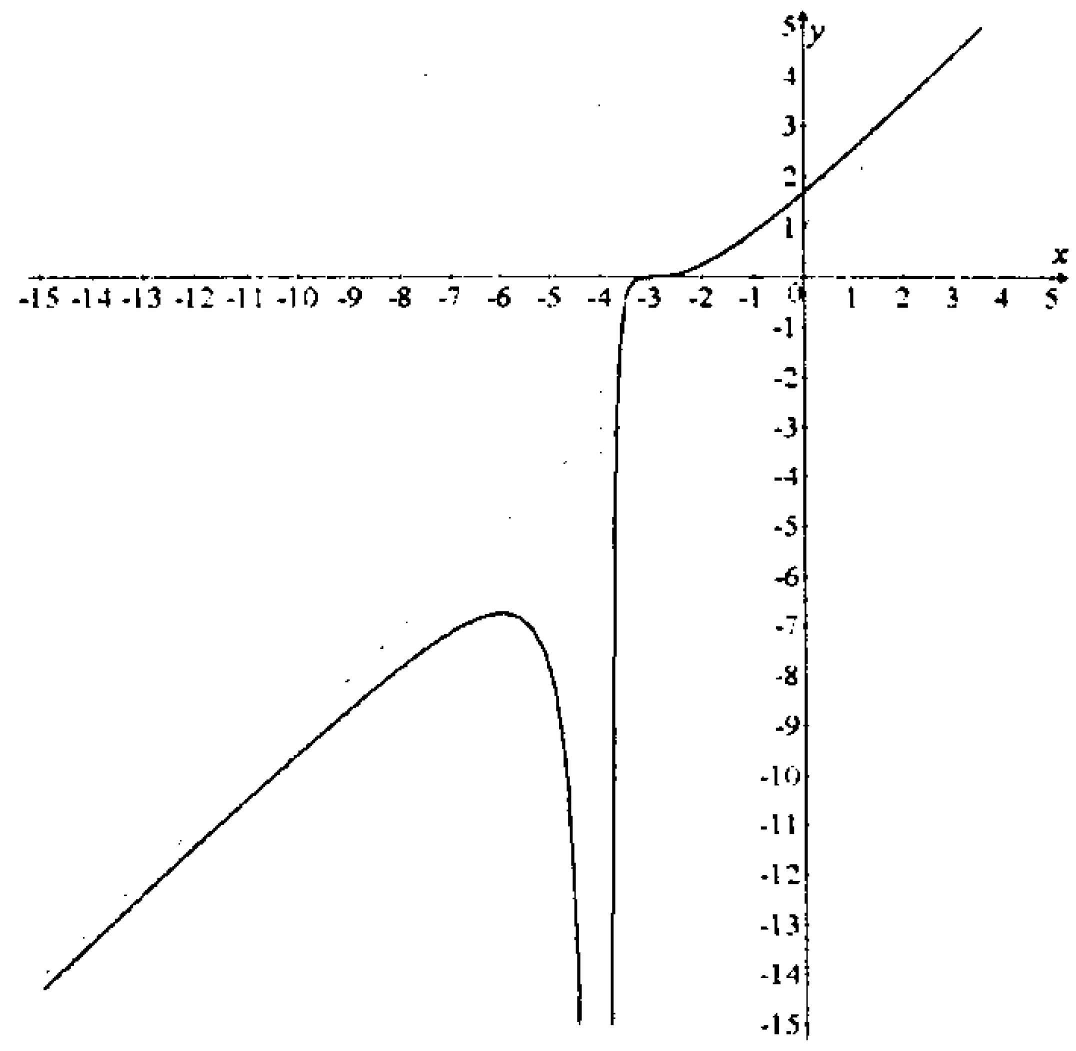


Вариант 82

1. $$\left(\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)^{\frac{1}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x}}=$$

$$=\left(1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}}\to\boxed{e}$$



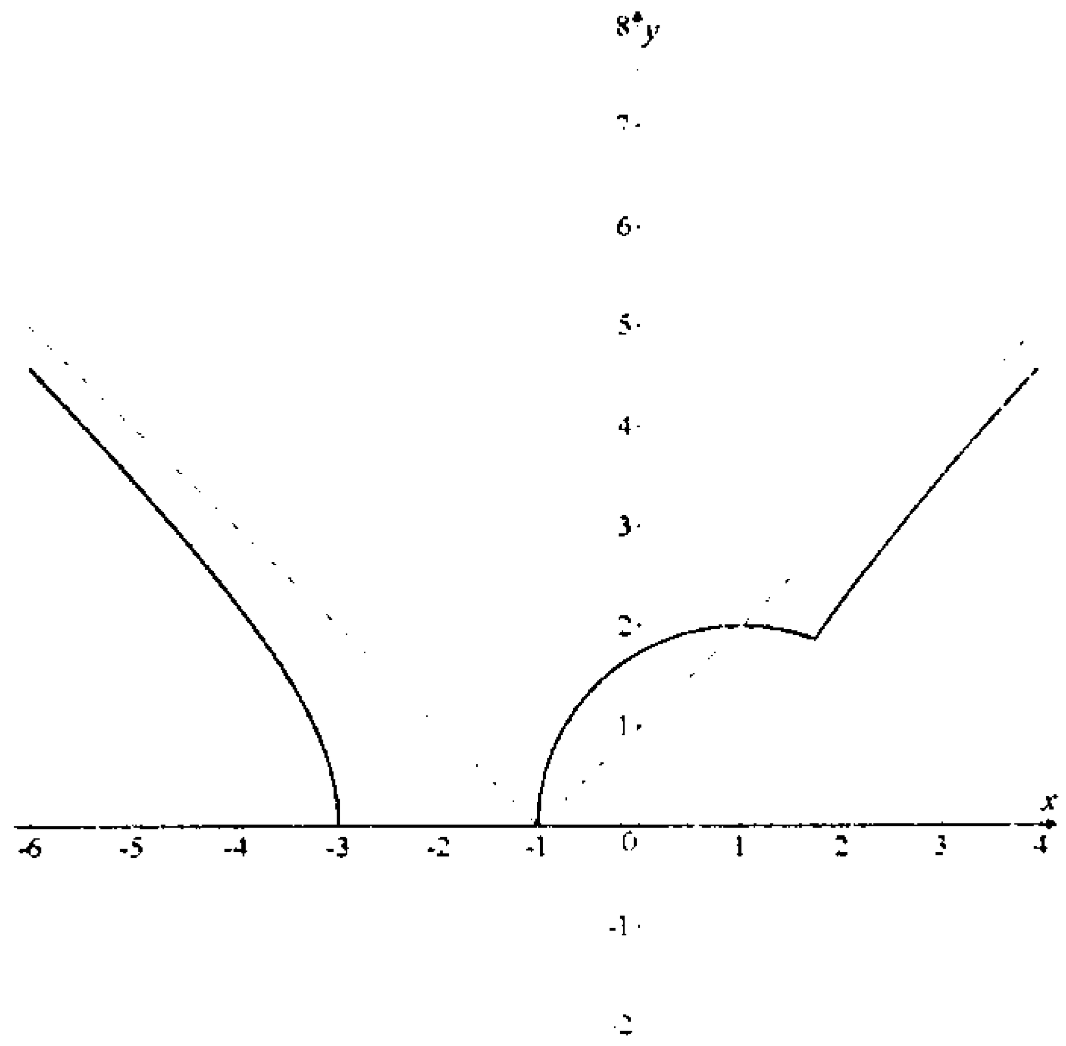
2. а) $y'=\dfrac{(x+6)(x+3)^2}{(x+4)^3}$, $\quad y''=\dfrac{6(x+3)}{(x+4)^4}$.

Асимптоты: $x=-4$, $y=x+1$.

$(-3,0)$ — перегиб через горизонтальную касательную;

$\left(0,\frac{27}{16}\right)$ — пересечение с осью Oy;

$\left(-6,-\frac{27}{4}\right)$ — локальный максимум.



2. б) $D=(-\infty,-3]\cup[-1,+\infty)$

$y'=\dfrac{1+x\cdot\operatorname{sign}(x^2-3)}{\sqrt{2x+|x^2-3|}}$, $\quad y''=-\dfrac{4}{\left(\sqrt{2x+|x^2-3|}\right)^3}$.

Асимптоты: $y=x+1$ и $y=-x-1$.

$(-3,0)$ — локальный минимум, $y'(-3-0)=-\infty$;

$(-1,0)$ — локальный минимум, $y'(-3+0)=+\infty$;

$(0,\sqrt{3})$ — пересечение с осью Oy;

$(1,2)$ — локальный максимум, $y'(1)=0$;

$(\sqrt{3},\sqrt[4]{12})$ — локальный минимум, угловая точка, перемена выпуклости, $y'\left(\sqrt{3}\pm0\right)=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$.

3. $$\boxed{\begin{aligned}&4^n(n-1)!(x+2)^2(3-4x)^{-n}-2n4^{n-1}(n-2)!(x+2)(3-4x)^{-n+1}+\\&\qquad+n(n-1)4^{n-2}(n-3)!(3-4x)^{-n+2}\end{aligned}}$$

4. $$9(x-2)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3^{2k-3}}{(2k-3)!}+\frac{3^{2k}}{(2k-1)!}\right)(x-2)^{2k-1}+o((x-2)^{2n})=$$

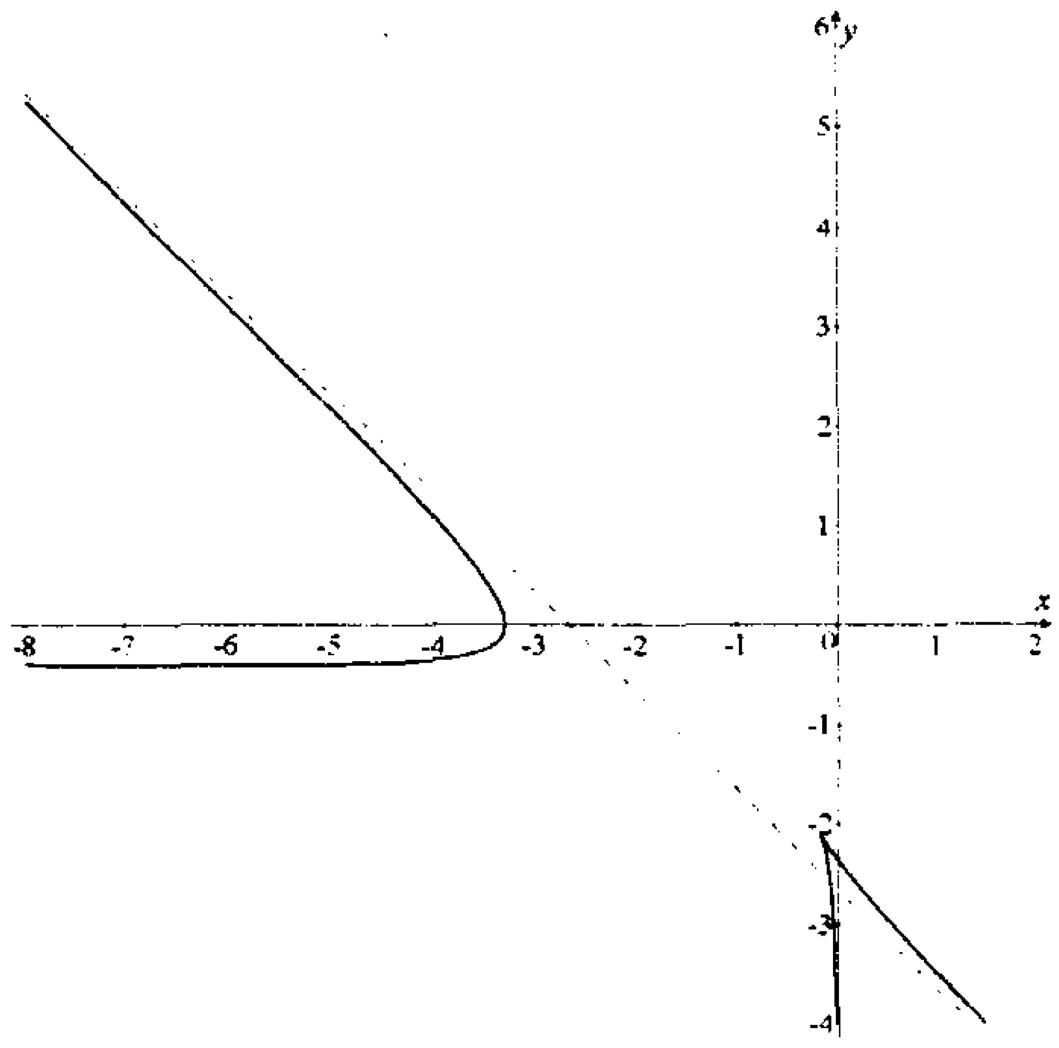
$$=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{2k-3}}{(2k+1)!}(4k^2-6k+29)(x-2)^{2k-1}+o((x-2)^{2n})}$$

5. $$\frac{\left(1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-1}{\left(x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(x+o(x^3)\right)}=\frac{-x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}\to\boxed{-2}$$

6. $\boxed{k=\frac{1}{2}}$ $x'_t=2$, $y'_t=0$, $x''_{tt}=0$, $y''_{tt}=-2$.

7. а) $$\int\left(2+\frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{3x^2-x+1}\right)dx=$$
$$=\boxed{2x+\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(3x^2-x+1)+\frac{7}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C}$$

7. б) $$\boxed{\frac{243}{8}\arcsin\frac{x}{3}+\left(\frac{45}{8}x-\frac{x^3}{4}\right)\sqrt{9-x^2}+C}$$



8. $x'_t=\dfrac{(t-2)(t+1)}{2t^2}e^{-\frac{t}{2}}$, $\quad y'_t=-\dfrac{(t-2)(t+3)}{6t^2}e^{\frac{t}{6}}$;

$y'_x=-\dfrac{t+3}{3(t+1)}e^{\frac{2t}{3}}$, $\quad y''_{xx}=-\dfrac{4t^3(t+4)}{9(t+1)^3(t-2)}e^{\frac{7t}{6}}$.

$t\to-\infty$ — асимптота $y=0$;

$t=-4$: $\left(-\frac{5}{4}e^2,-\frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}}\right)$ — перегиб, $y'_x=-\dfrac{e^{-\frac{8}{3}}}{9}$;

$t=-3$: $\left(-\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}},-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ — локальный минимум;

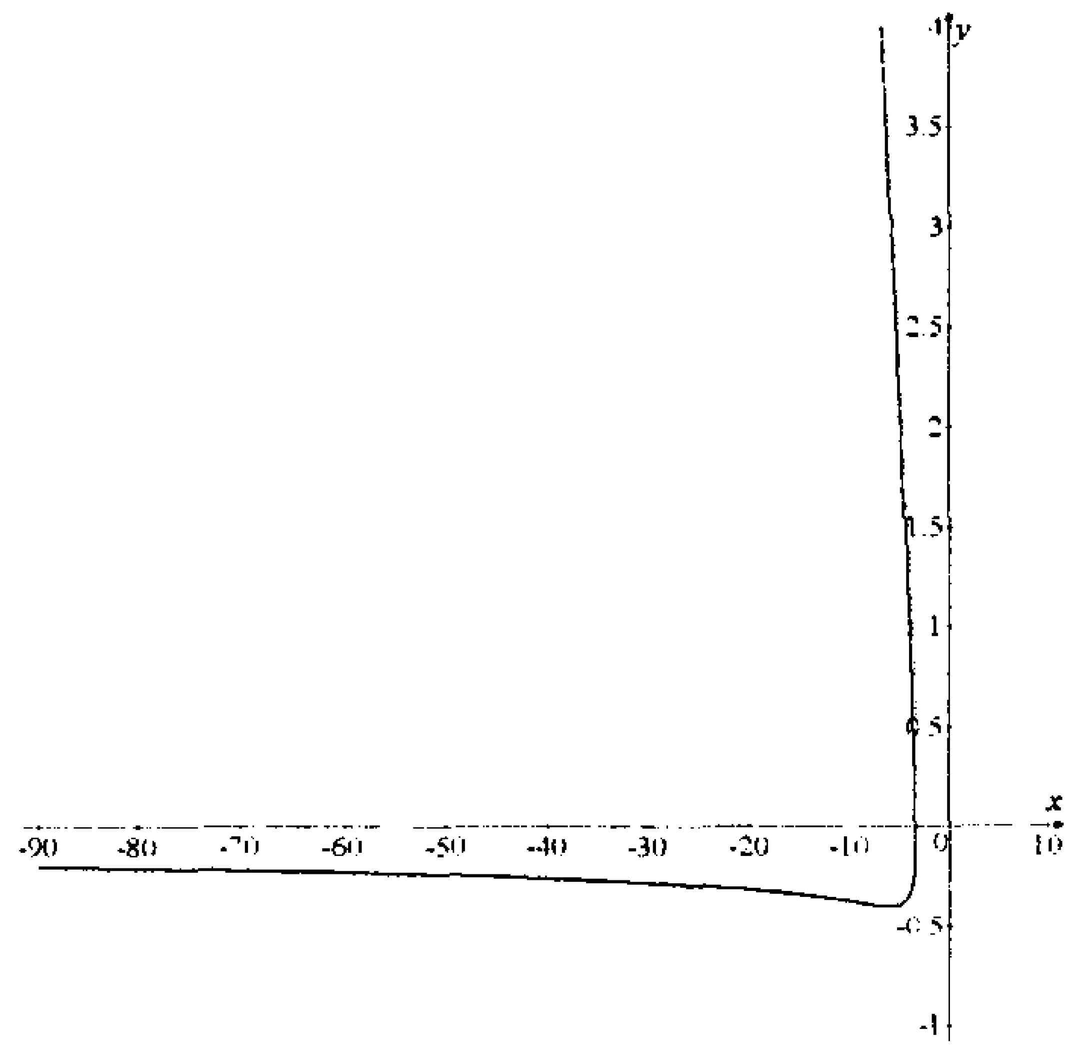
$t=-1$: $(-2\sqrt{e},0)$ — локальный максимум функции $x=x(y)$;

$t\to\pm0$ — асимптота $y=-x-\dfrac{8}{3}$;

$t=1$: $(0,-2\sqrt[6]{e})$ — пересечение с осью Oy;

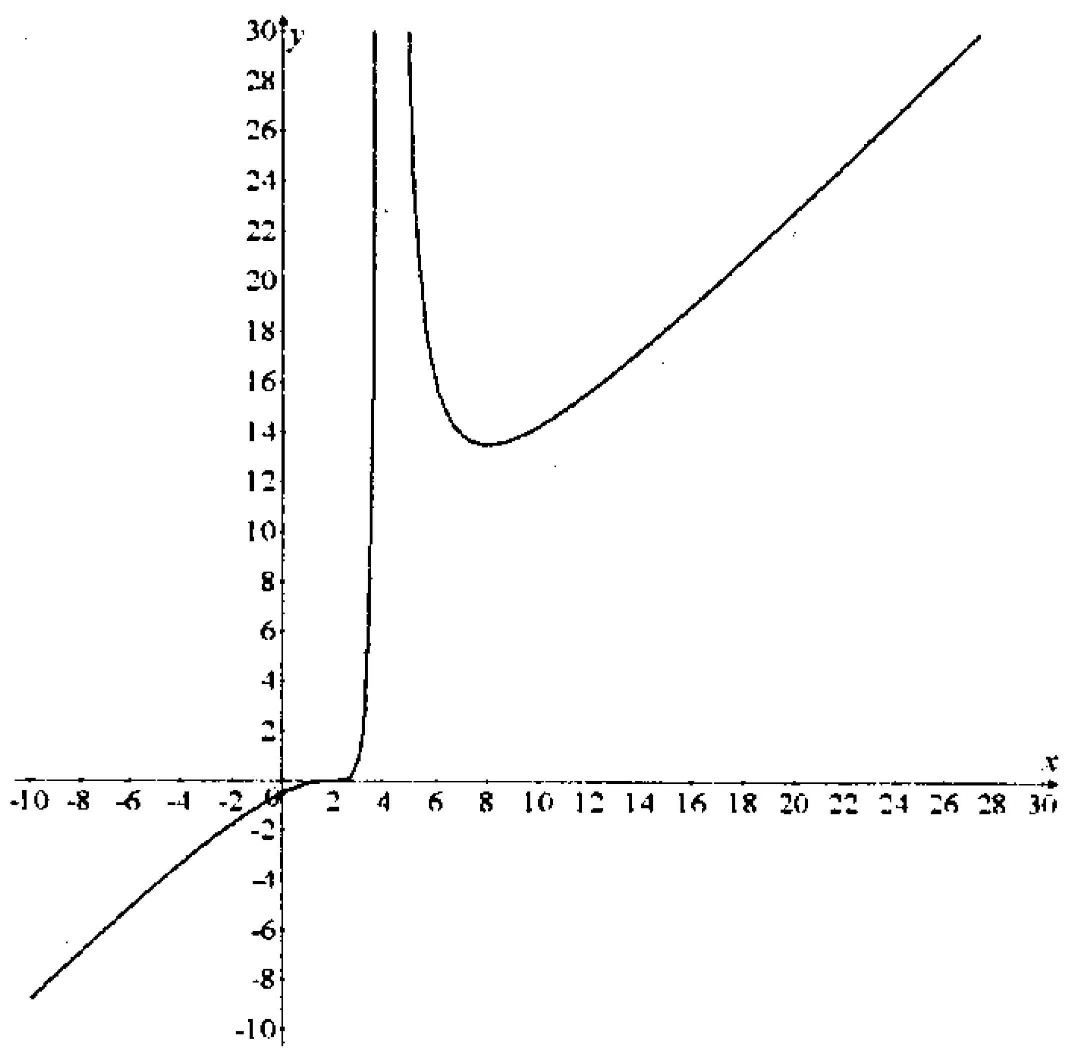
$t=2$: $\left(-\frac{1}{2e},-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}\right)$ — точка возврата, $y'_x=-\dfrac{5}{9}e^{\frac{4}{3}}$;

$t\to+\infty$ — асимптота $x=0$.

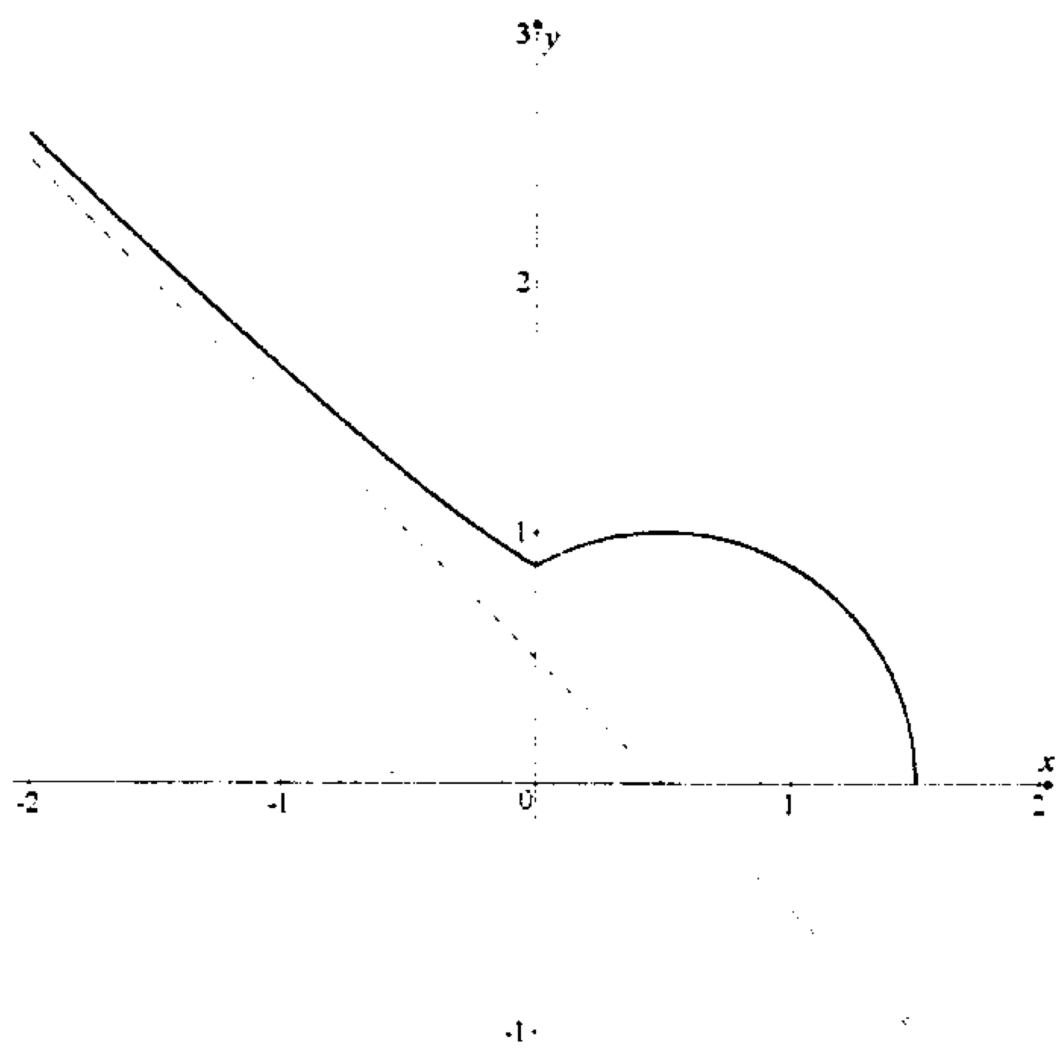


Вариант 83

1. $$\left(\left(1+2x-2x^2+4x^3+o(x^3)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(2x-2x^2+\frac{10}{3}x^3+o(x^3)\right)\right)^{\frac{1}{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}}=$$
$$=\left(1+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}}\to\boxed{e^2}$$



2. а) $y'=\dfrac{(x-8)(x-2)^2}{(x-4)^3}$, $\quad y''=\dfrac{24(x-2)}{(x-4)^4}$.
Асимптоты: $x=4$, $y=x+2$.
$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ — пересечение с осью Oy;
$(2,0)$ — перегиб через горизонтальную касательную;
$\left(8,\frac{27}{2}\right)$ — локальный минимум.



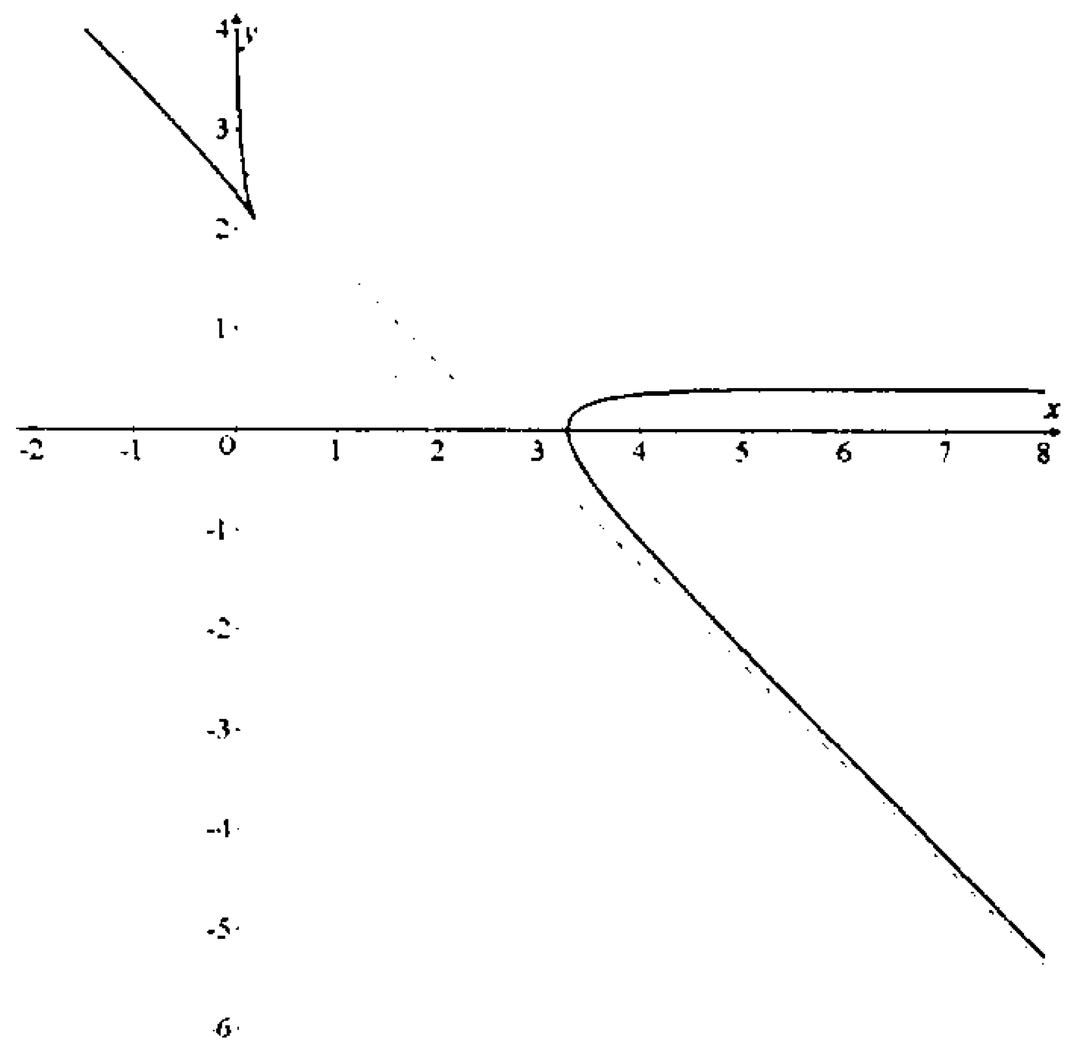
2. б) $D=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$
$y'=-\dfrac{(2x-1)\cdot\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{3-4|x|(x-1)}}$, $\quad y''=-\dfrac{4(3-\operatorname{sign}(x))\operatorname{sign}(x)}{\left(\sqrt{3-4|x|(x-1)}\right)^3}$.
Асимптота: $y=-x+\frac{1}{2}$.
$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — локальный минимум, угловая точка, перемена выпуклости, $y'(0\pm0)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;
$\left(\frac{1}{2},1\right)$ — локальный максимум, $y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;
$\left(\frac{3}{2},0\right)$ — локальный минимум, $y'\left(\frac{3}{2}-0\right)=-\infty$.

3. $$\boxed{\begin{aligned}&(-1)^{n+1}(2n-3)!!\frac{3^n}{2^n}(x+3)^2(3x-4)^{\frac{1}{2}-n}+n(-1)^n(2n-5)!!\frac{3^{n-1}}{2^{n-2}}(x+3)(3x-4)^{\frac{3}{2}-n}+\\&\qquad+n(n-1)(-1)^{n+1}(2n-7)!!\frac{3^{n-2}}{2^{n-2}}(3x-4)^{\frac{5}{2}-n}\end{aligned}}$$

4. $$-2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{2^{2k+1}}{(2k)!}+\frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!}\right)(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})=$$
$$=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}(2k^2-k+4)(x+1)^{2k}+o((x+1)^{2n+1})}$$

5. $$\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}=\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\to\boxed{-\frac{1}{3}}$$

6. $\boxed{k = \dfrac{8}{9}}$ $x'_t = -\frac{3}{2}$, $y'_t = 0$, $x''_{tt} = -\frac{5}{4}$, $y''_{tt} = 2$.



7. а) $\displaystyle\int \left(-2 + \frac{1}{x-2} + \frac{2x+4}{2x^2+x+2}\right) dx =$

$$= \boxed{-2x + \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(2x^2+x+2) + \frac{7}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{15}} + C}$$

7. б) $\boxed{6\arcsin\dfrac{x}{2} + \left(\dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{5}{3}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{20}{3}\right)\sqrt{4-x^2} + C}$

8. $x'_t = \dfrac{(t+2)(t-1)}{2t^2}e^{\frac{t}{2}}$, $\quad y'_t = -\dfrac{(t+2)(t-3)}{6t^2}e^{-\frac{t}{6}}$;

$y'_x = -\dfrac{t-3}{3(t-1)}e^{-\frac{2t}{3}}$, $\quad y''_{xx} = \dfrac{4t^3(t-4)}{9(t-1)^3(t+2)}e^{-\frac{7t}{6}}$.

$t \to -\infty$ — асимптота $x = 0$;

$t = -2$: $\left(\dfrac{1}{2e}, \dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}\right)$ — точка возврата, $y'_x = -\dfrac{5}{9}e^{\frac{4}{3}}$;

$t = -1$: $(0, 2\sqrt[6]{e})$ — пересечение с осью Oy;

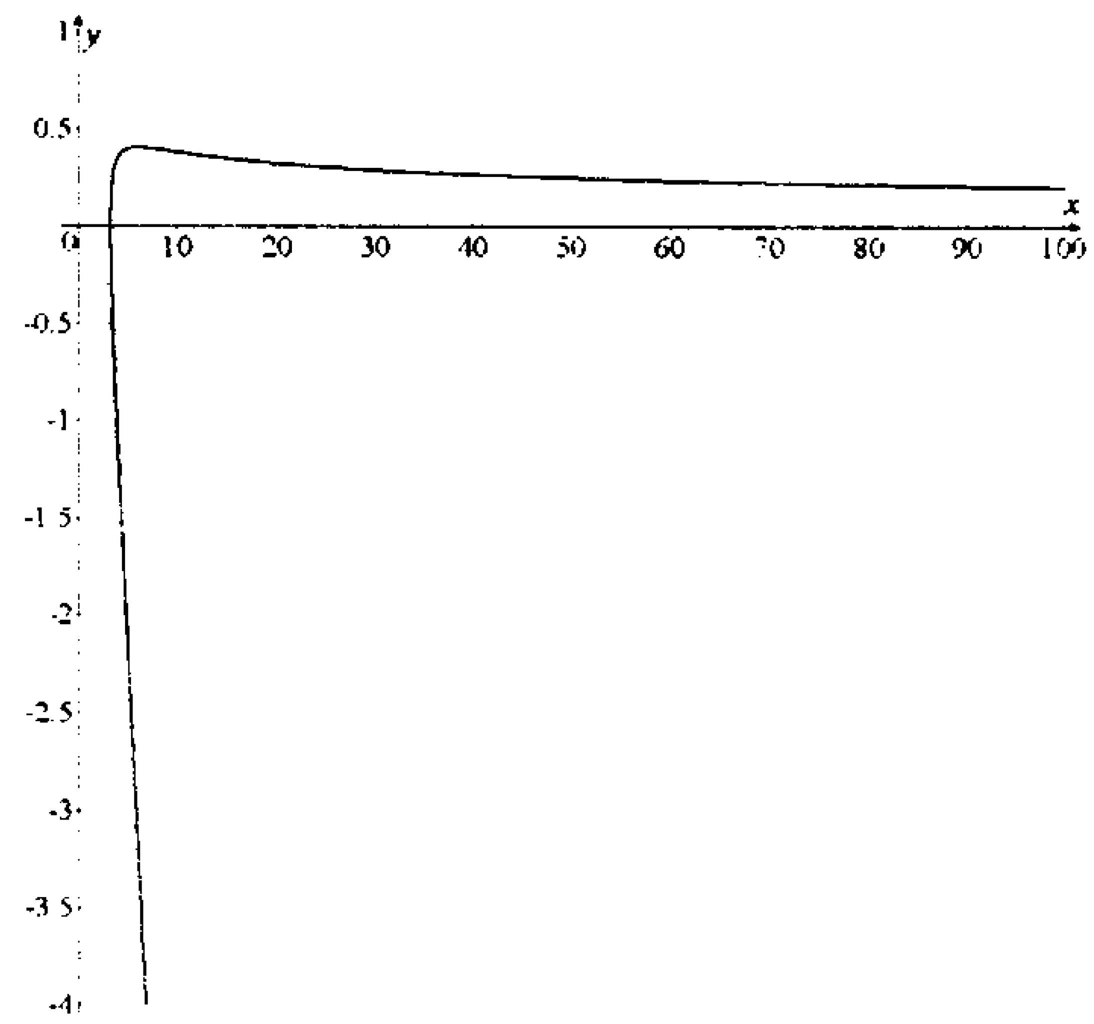
$t \to \pm 0$ — асимптота $y = x + \dfrac{8}{3}$;

$t = 1$: $(2\sqrt{e}, 0)$ — локальный минимум функции $x = x(y)$;

$t = 3$: $\left(\dfrac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ — локальный максимум;

$t = 4$: $\left(\dfrac{5}{4}e^2, \dfrac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}}\right)$ — перегиб, $y'_x = -\dfrac{e^{-\frac{8}{3}}}{9}$;

$t \to +\infty$ — асимптота $y = 0$.



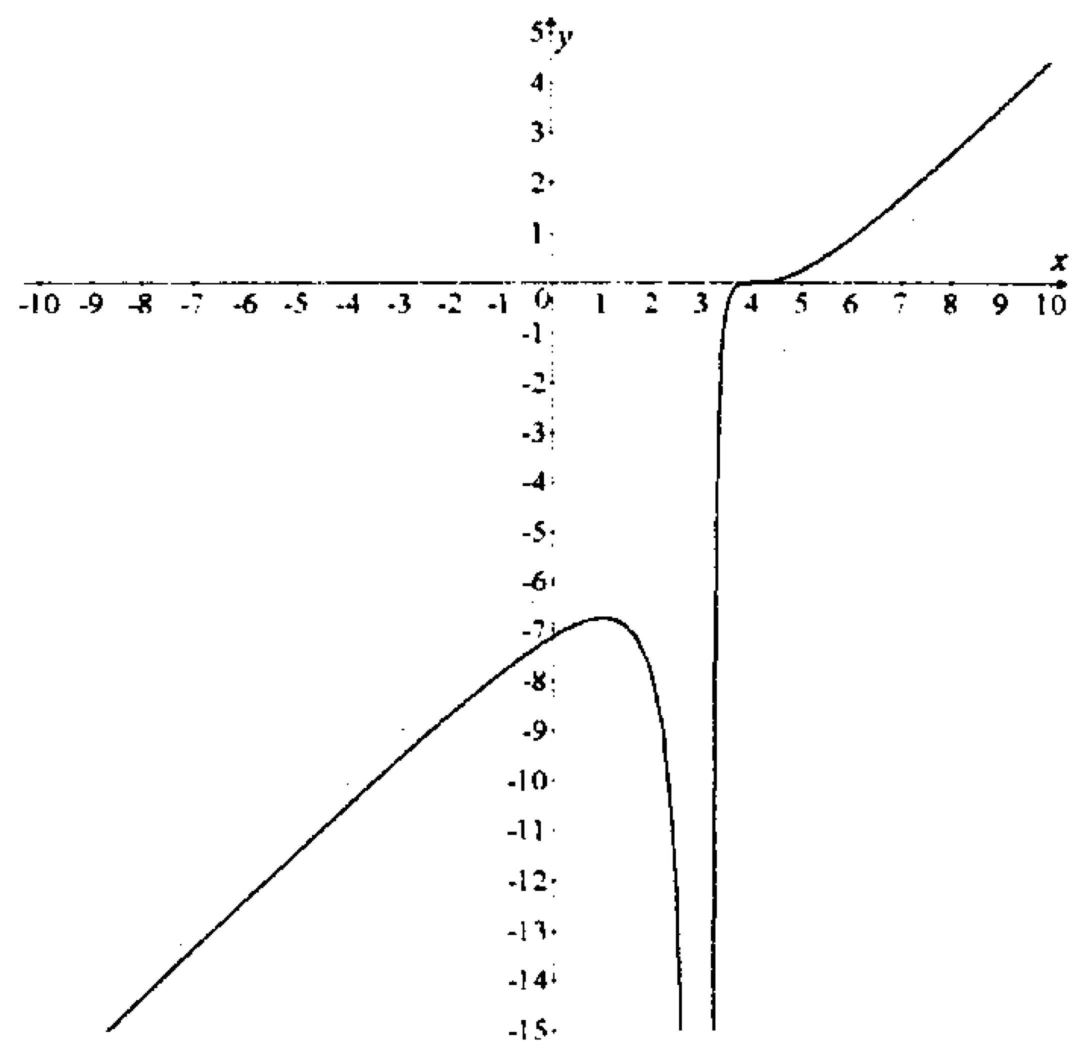
Вариант 84

1. $$\left(\left(1-x+2x^2-\frac{14}{3}x^3+o(x^3)\right)+\right.$$

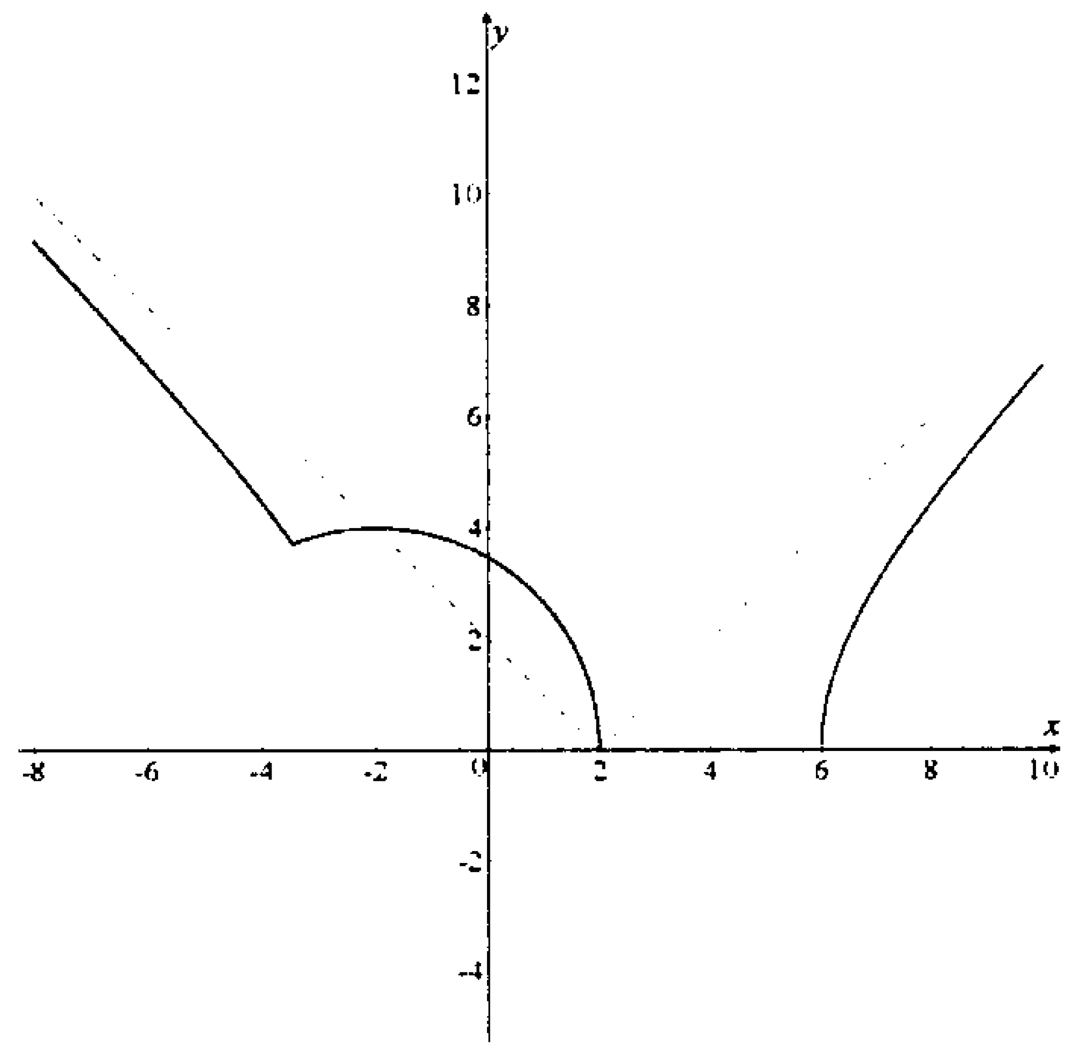
$$\left.+\frac{1}{4}\left(4x+\frac{32}{3}x^3-8x^2+\frac{64}{3}x^3+o(x^3)\right)\right)^{\frac{1}{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}}=$$

$$=\left(1+\frac{10}{3}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}}\to\boxed{e^{10}}$$

2. а) $y'=\dfrac{(x-1)(x-4)^2}{(x-3)^3}$, $\quad y''=\dfrac{6(x-4)}{(x-3)^4}$.
Асимптоты: $x=3$, $y=x-6$.
$\left(0,-\frac{84}{9}\right)$ — пересечение с осью Oy;
$\left(1,-\frac{27}{4}\right)$ — локальный максимум.
$(4,0)$ — перегиб через горизонтальную касательную;



2. б) $D=(-\infty,2]\cup[6,+\infty)$
$y'=\dfrac{x\cdot\operatorname{sign}(x^2-12)-2}{\sqrt{|x^2-12|-4x}}$, $\quad y''=-\dfrac{16}{\left(\sqrt{|x^2-12|-4x}\right)^3}$.
Асимптоты: $y=x-2$ и $y=2-x$.
$\left(-2\sqrt{3},\sqrt{8\sqrt{3}}\right)$ — локальный минимум, угловая точка, перемена выпуклости, $y'\left(\sqrt{3}\pm0\right)=\dfrac{\pm2\sqrt{3}-2}{\sqrt{8\sqrt{3}}}$;
$(-2,4)$ — локальный максимум, $y'(1)=0$;
$(0,2\sqrt{3})$ — пересечение с осью Oy;
$(2,0)$ — локальный минимум, $y'(-3-0)=-\infty$;
$(6,0)$ — локальный минимум, $y'(-3+0)=+\infty$.



3. $$\boxed{\begin{aligned}&(-1)^{n-1}5^n(n-1)!(x-1)^2(5x+3)^{-n}+2n(-1)^n5^{n-1}(n-2)!(x-1)(5x+3)^{-n+1}+\\&\qquad+n(n-1)(-1)^{n-1}5^{n-2}(n-3)!(5x+3)^{-n+2}\end{aligned}}$$

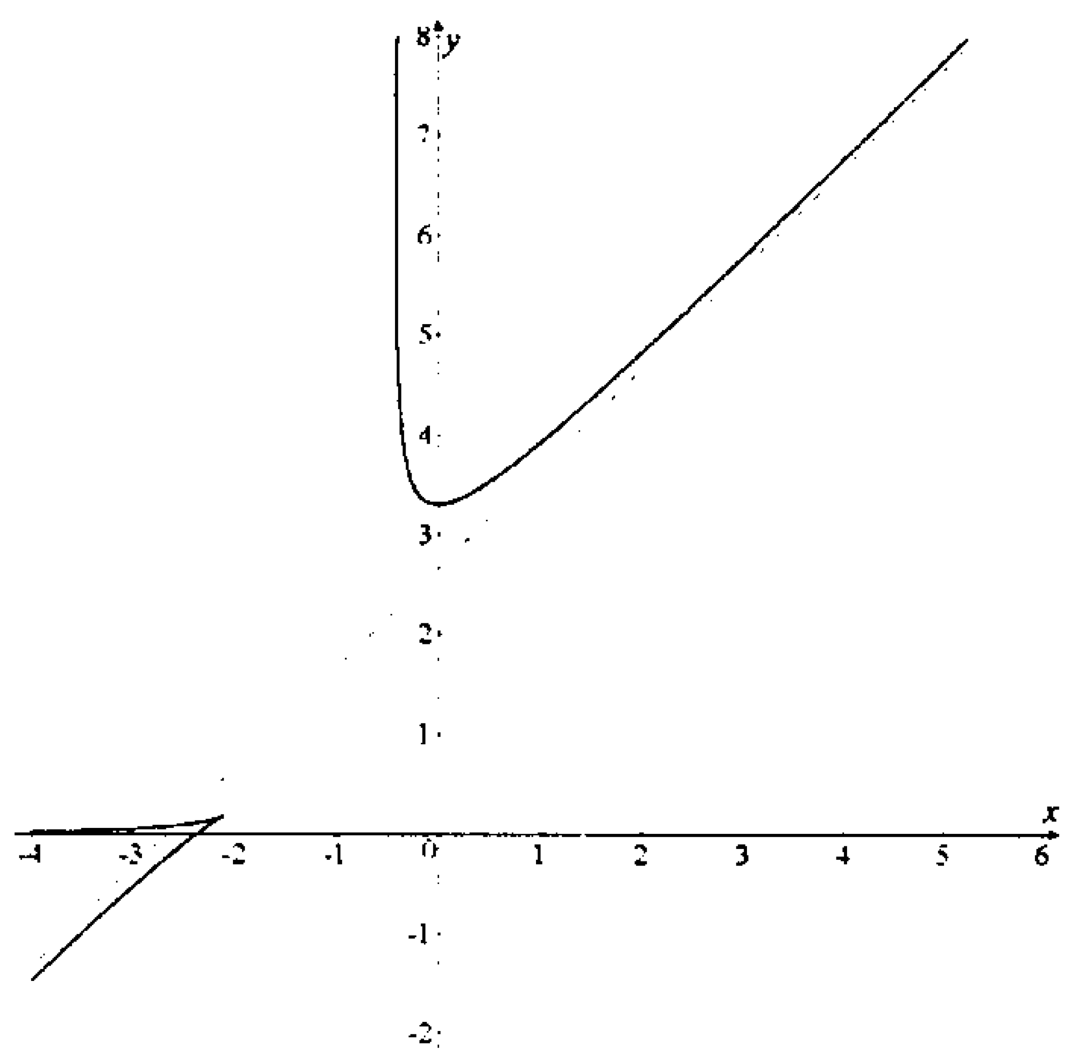
4. $$-27(x+2)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\left(\frac{3^{2k-3}}{(2k-3)!}+\frac{3^{2k+1}}{(2k-1)!}\right)(x+2)^{2k-1}+o((x+2)^{2n})=$$

$$=\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k3^{2k-3}}{(2k+1)!}(4k^2-6k+83)(x+2)^{2k-1}+o((x+2)^{2n})}$$

5. $$\frac{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}+\frac{3}{4}\left(x^2+o(x^3)\right)-1}{\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\to\boxed{\frac{3}{2}}$$

6. $\boxed{k=4}$ $x'_t=-\frac{3}{2}$, $y'_t=0$, $x''_{tt}=\frac{3}{4}$, $y''_{tt}=9$.



7. а) $$\int\left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{3x^2+x+1}\right)dx=$$

$$=\boxed{x+2\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln(3x^2+x+1)+\frac{8}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{11}}+C}$$

7. б) $$\boxed{-\frac{625}{8}\arcsin\frac{x}{5}+\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{25}{8}x-\frac{25}{3}\right)\sqrt{9-x^2}+C}$$

8. $x'_t=\dfrac{(t+2)(t-3)}{6t^2}e^{-\frac{t}{6}}$, $\quad y'_t=\dfrac{(t+2)(t-1)}{2t^2}e^{\frac{t}{2}}$;

$y'_x=3\dfrac{t-1}{t-3}e^{\frac{2t}{3}}$, $\quad y''_{xx}=\dfrac{12t^3(t-4)}{(t-3)^3(t+2)}e^{\frac{5t}{6}}$.

$t\to-\infty$ — асимптота $y=0$;

$t=-2$: $\left(-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}},\frac{1}{2e}\right)$ — точка возврата, $y'_x=\frac{9}{5}e^{-\frac{4}{3}}$;

$t=-1$: $(-2\sqrt[6]{e},0)$ — пересечение с осью Ox;

$t\to\pm0$ — асимптота $y=x+\frac{8}{3}$;

$t=1$: $(0,2\sqrt{e})$ — локальный минимум;

$t=3$: $\left(-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}},\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}\right)$ — локальный минимум функции $x=x(y)$;

$t=4$: $\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}},\frac{5}{4}e^{2}\right)$ — перегиб, $y'_x=9e^{\frac{8}{3}}$;

$t\to+\infty$ — асимптота $x=0$.