Математический анализ, 1 курс, 1 семестр, 2004-2005. **Вариант 1**

1. $\bar{r}_0=\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\bar{r}_{цк}=\left(-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. → $2\sqrt{2}$

2. а) $x-2\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+3\,arctg(x+1)+C.$

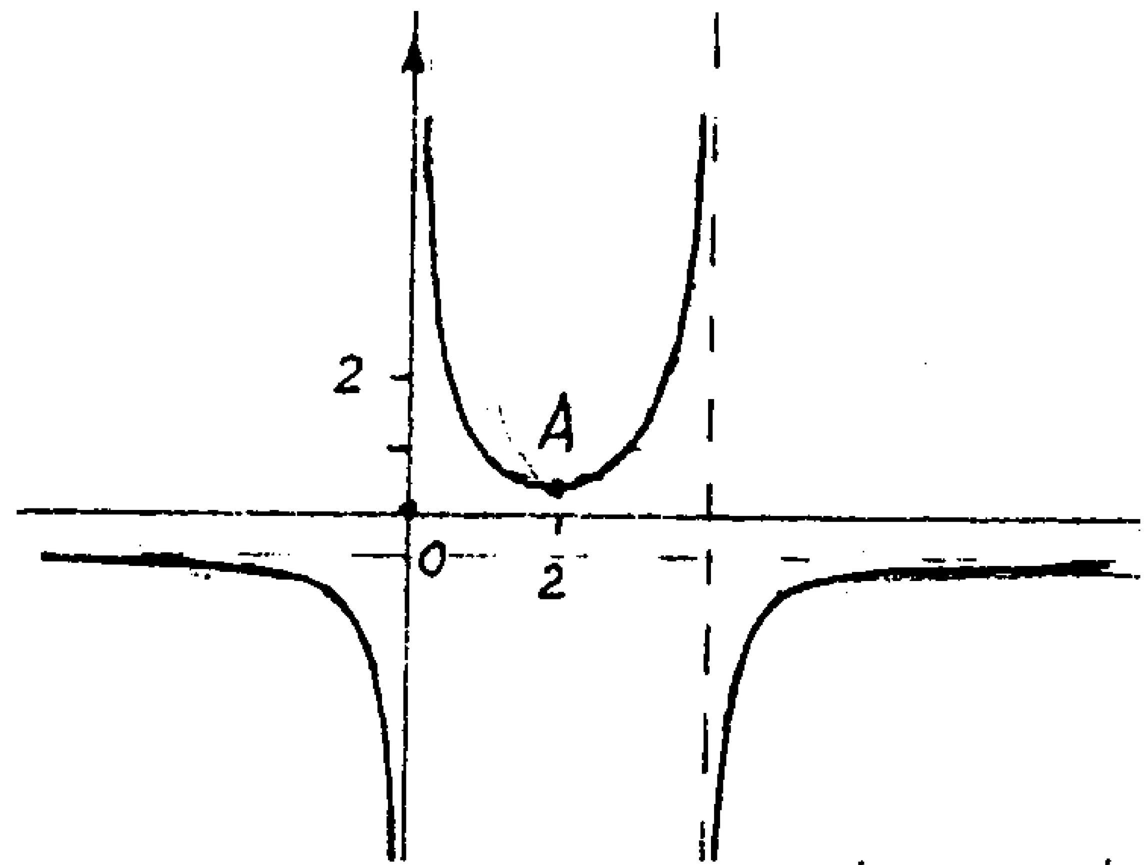
2. б) $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}\arcsin^2 x-\frac{x^2}{4}+C.$

3.
$$y^{(n)}(x)=(x+1)^2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\ln 2}\cdot(n-1)!\cdot\left[\frac{1}{(x-7/6)^n}-\frac{1}{(x-1/2)^n}\right]+$$
$$+n\cdot 2(x+1)\cdot\frac{(-1)^{n}}{\ln 2}\cdot(n-2)!\cdot\left[\frac{1}{(x-7/6)^{n-1}}-\frac{1}{(x-1/2)^{n-1}}\right]+$$
$$+n\cdot(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{\ln 2}\cdot(n-3)!\cdot\left[\frac{1}{(x-7/6)^{n-2}}-\frac{1}{(x-1/2)^{n-2}}\right].$$

4. $f(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot(x+1/3)^k+o\left((x+1/3)^n\right)$, где

$$A_k=\begin{cases}(-1)^m C_{1/2}^m\dfrac{3^{2m-\frac{1}{2}}}{2^{2m-1}}, & k=2m-\textit{четное},\\ (-1)^m C_{1/2}^m\dfrac{3^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m-1}}, & k=2m+1-\textit{нечетное}.\end{cases}$$

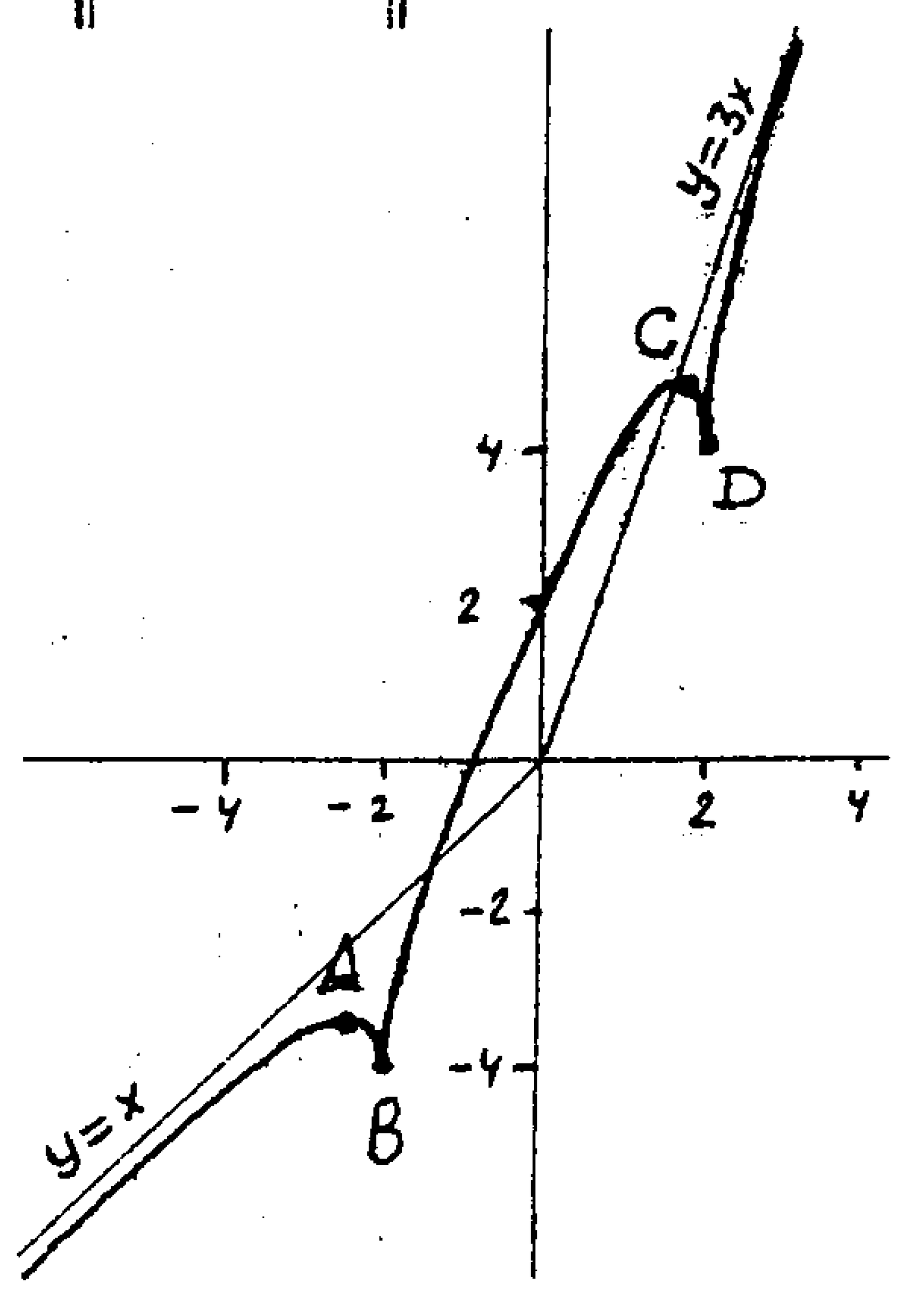
5. а) $y'(x)=5\frac{(x-2)}{x^2(x-4)^2}$; $y''(x)=5\frac{(12x-3x^2-16)}{x^3(x-4)^3}$;



асимптоты: $y=-\frac{1}{2}$ при $x\to\pm\infty$,
$x=0$ при $x\to 0\pm 0$,
$x=4$ при $x\to 4\pm 0$;

A: минимум, $x_A=2$, $y(x_A)=\frac{1}{8}$, $y'(x_A)=0$.

5. б) $y'(x)=2+\frac{x\cdot sign(|x-2|)}{\sqrt{|x^2-4|}}$; $y''(x)=\frac{-4}{|x^2-4|^{3/2}}$;



асимптоты: $y=3x$ при $x\to+\infty$,
$y=x$ при $x\to-\infty$;

A: максимум, $x_A=-4\sqrt{3}/3$, $y(x_A)=-2\sqrt{3}$, $y'(x_A)=0$.
B: минимум, $x_B=-2$, $y(x_B)=-4$, $y'(x_B\pm 0)=\pm\infty$;
C: максимум, $x_C=4\sqrt{5}/5$, $y(x_C)=2\sqrt{5}$, $y'(x_C)=0$;
D: минимум, $x_D=2$, $y(x_D)=4$, $y'(x_D\pm 0)=\pm\infty$.
B и D - точки возврата.

6. При $x\to 0$: $\cos(tgx)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{24}x^4+o(x^4)$; $\frac{1}{ctgx}+\frac{1}{2}\sin 2x=2x-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$;

$$\frac{\left[x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right]+2\left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)\right]}{\left[1-2x^2+\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\right]-\left[1-2x^2-4x^4+o(x^4)\right]}\to-\frac{3}{32}.$$

7. При $x\to 0$: $(1+x)^x=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$;

$$\left(\frac{\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)-\left(1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\right)}{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{24}x^4+o(x^4)\right)}\right)^{\frac{1}{x+o(x)}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}\right)^{\frac{1}{x+o(x)}}=\to e^{-5/3}.$$

8. $\dot{x}(t)=\frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$; $\dot{y}(t)=6\frac{(t-1)(t+5/3)}{(t+1)^2(t+3)^2}$;

$y'_x(t)=6\frac{(t+5/3)}{(t+3)^3}$; $y''_{xx}(t)=-12\frac{(t+1)^3}{(t-1)(t+3)^5}$;

асимптоты: $y=1$ при $t\to\pm\infty$;

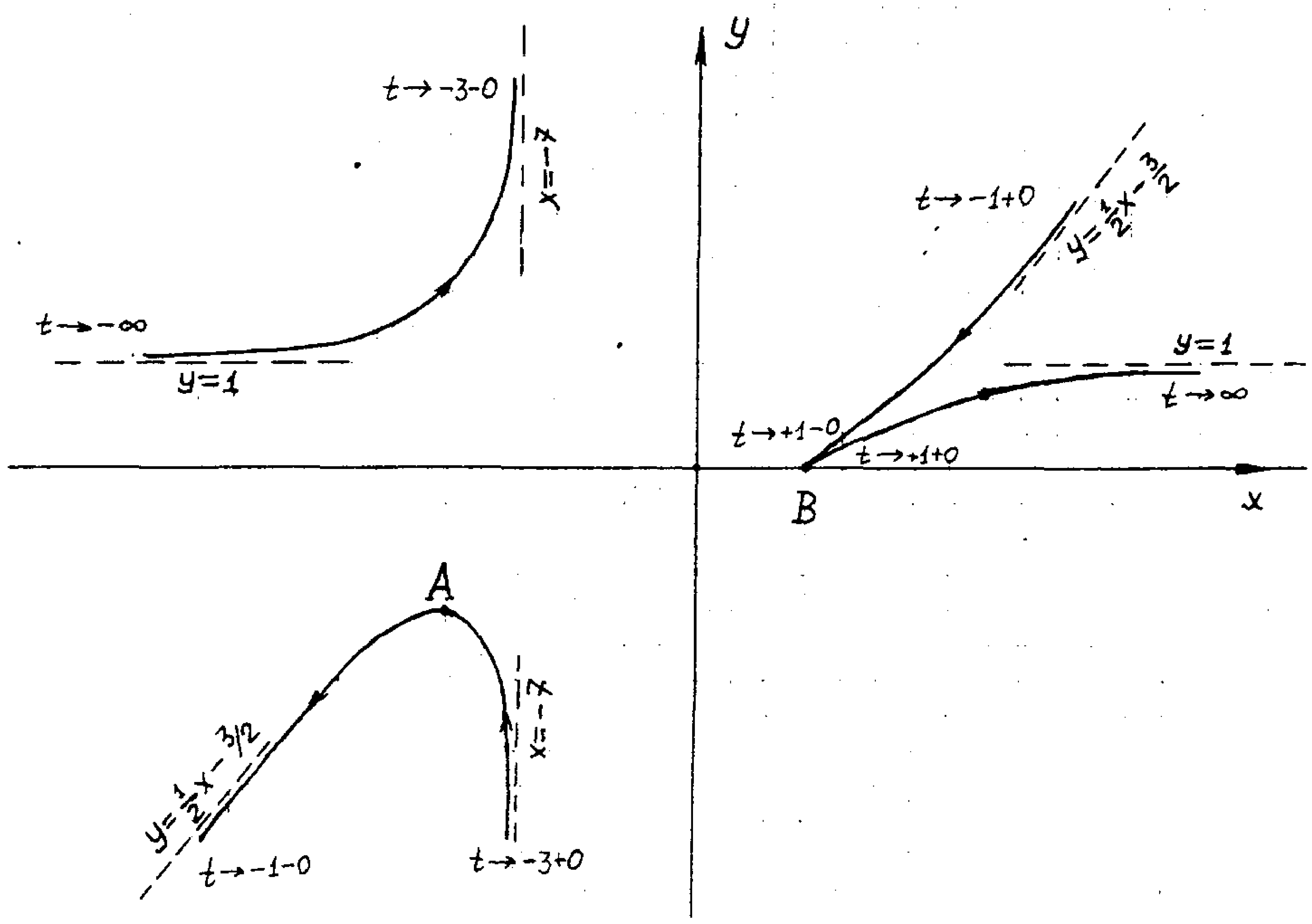
$x=-7$ при $t\to-3\pm0$,

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ при $t\to-1\pm0$;

A: точка максимума, $t_A=-5/3$, $x(t_A)=-29/3$, $y(t_A)=-8$, $y'_x(t_A)=0$.

B: точка минимума, $t_B=+1$, $x(t_B)=1$, $y(t_B)=0$, $y'_x(t_B)=1/4$;

B - точка возврата.



9. Последовательность монотонно возрастает ($x_{n+1}>x_n$) и ограничена ($x_n<\sqrt{2}+1$); $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Математический анализ, 1 курс, 1 семестр, 2004-2005. **Вариант 2**

1. $\bar{r}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\ln 2\right),\ k_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{3}},\ \bar{r}_{цк}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\right).$

2. а) $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(2x^2-2x+1)-3\,arctg(2x-1)+C.$

2. б) $-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

3. $$y^{(n)}(x)=(2x^2+4x-1)\cdot 2^{n-1}\cdot\left[2^n\sin(4x+\pi n/2)-\sin(2x+\pi n/2)\right]+$$
$$+n\cdot(x+1)\cdot 2^n\cdot\left[-2^{n-1}\cos(4x+\pi n/2)+\cos(2x+\pi n/2)\right]+$$
$$+n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}\cdot\left[-2^{n-2}\sin\left(4x+\pi n/2\right)+\sin\left(2x+\pi n/2\right)\right].$$

4. $f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left[(-1)^{k-1}2^k-1\right]}{k}\cdot(x-1)^{k+1}+o\left((x-1)^n\right).$

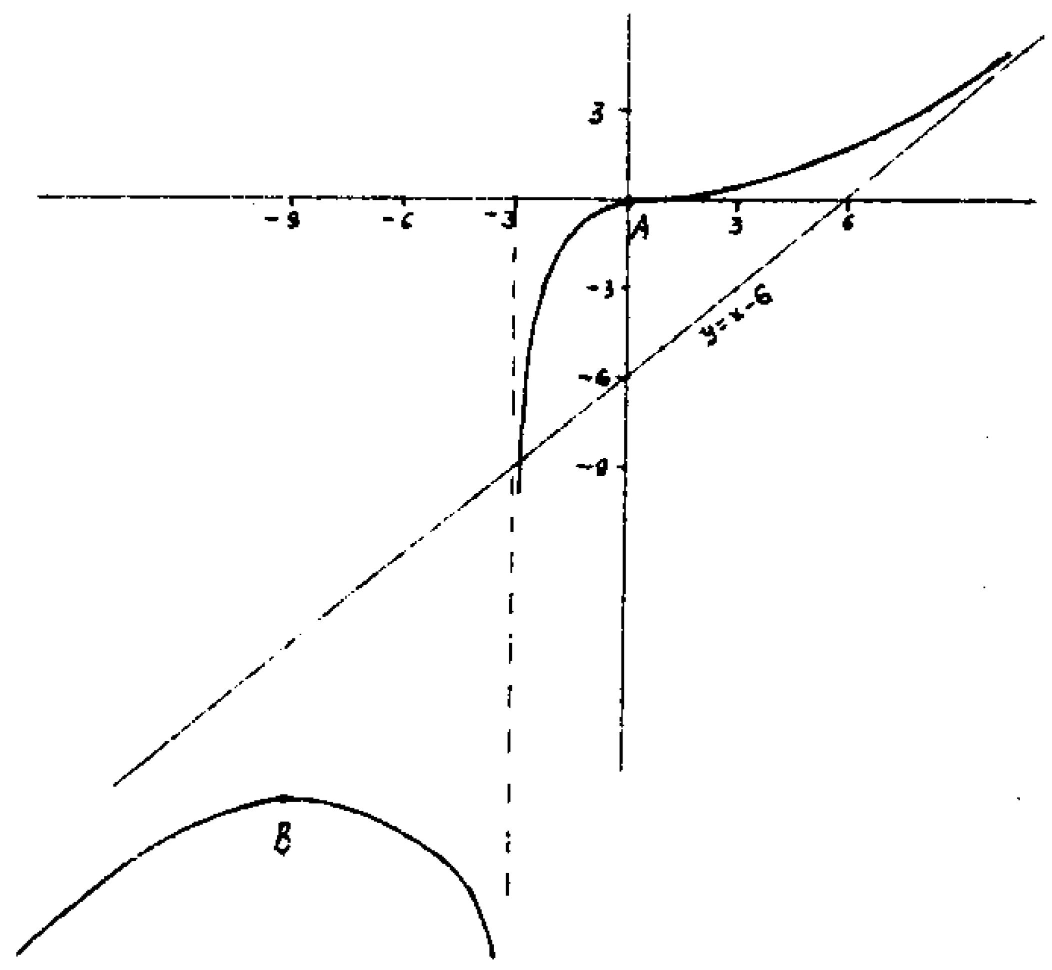
5. а) $y'(x)=\frac{x^2(x+9)}{(x+3)^3};\quad y''(x)=54\frac{x}{(x+3)^4};$

асимптоты: $y=x-6$ при $x\to\pm\infty$,

$x=-3$ при $x\to-3\pm 0$,

A: перегиб, $x_A=0,\ y(x_A)=0,\ y'(x_A)=0.$

B: максимум, $x_B=-9,\ y(x_B)=-\frac{81}{4},\ y'(x_B)=0.$



5. б) $y'(x)=1-\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}};\quad y''(x)=\frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}};$

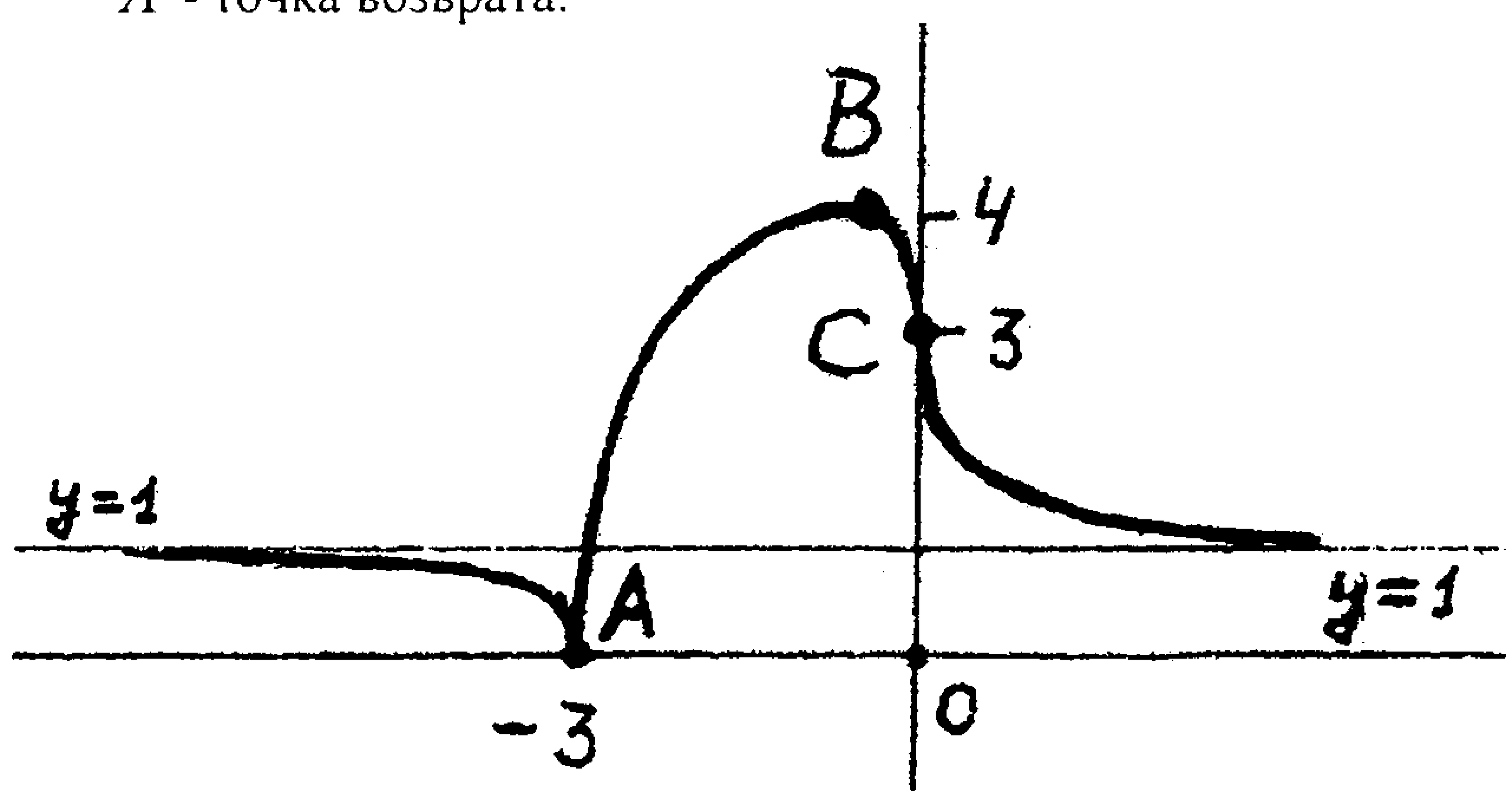
асимптоты: $y=1$ при $x\to\pm\infty$,

A: минимум, $x_A=-3,\ y(x_A)=0,\ y'(x_A\pm 0)=\pm\infty;$

B: максимум, $x_B=-\frac{1}{3},\ y(x_B)=4,\ y'(x_B)=0;$

C: перегиб, $x_C=0,\ y(x_C)=3,\ y'(x_C\pm 0)=-\infty;$

A - точка возврата.



6. При $x \to 0$: $e^{arctg\,x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$; $\sqrt[4]{1+4x} = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)$;

$\frac{ch\,x}{1 + sh\,x} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$; $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$;

$$\frac{\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right] - \left[1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)\right] - 4\left[-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right]}{\left[1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right] - \left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right] - \left[2x^2 + o(x^3)\right]} \to +\frac{11}{4}.$$

7. $sh^2 x = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$; $\ln(1 + x^2 + x^4) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 - + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)$

$$\sim \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right) - x^2}{\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)\right) - x^2}\right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} \Longrightarrow e^{\frac{22}{15}} \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

8. $\dot{x}(t) = -3\frac{(t + 2/3)\cdot(t+2)}{t^2(t+1)^2}$; $\dot{y}(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$;

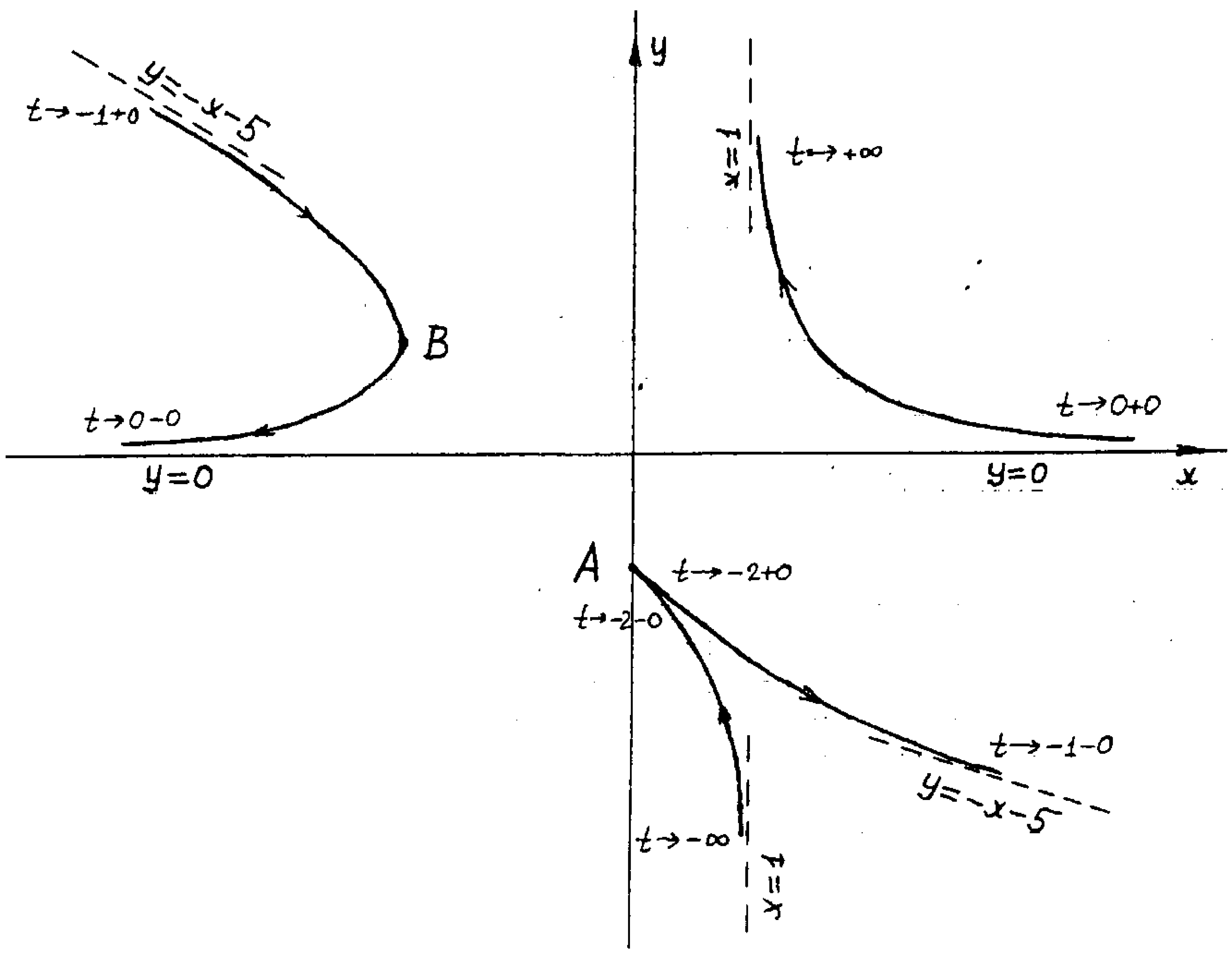
$y'_x(t) = -\frac{t^3}{3\cdot(t + 2/3)}$; $y''_{xx}(t) = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^4(t+1)^3}{(t+2/3)^3(t+2)}$;

асимптоты: $x = 1$ при $t \to \pm\infty$,
$y = -x - 5$ при $t \to -1 \pm 0$;
$y = 0$ при $t \to 0 \pm 0$;

A: точка максимума, $t_A = -2$, $x(t_A) = 0$, $y(t_A) = -4$, $y'_x(t_A \pm 0) = -2 \pm 0$.

B: точка поворота, $t_B = -2/3$, $x(t_B) = -8$, $y(t_B) = 4/3$, $y'_x(t_B \pm 0) = \pm\infty$;

$\sim$ A: точка возврата.



9. Последовательность монотонно возрастает ($x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2}$) и ограничена ($x_n < 1$); $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

1. $\bar{r}_0 = \left(\ln(1+\sqrt{2}), 1\right)$, $k_{\max} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $\bar{r}_{цк} = \left(\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{6}, 4\right)$.

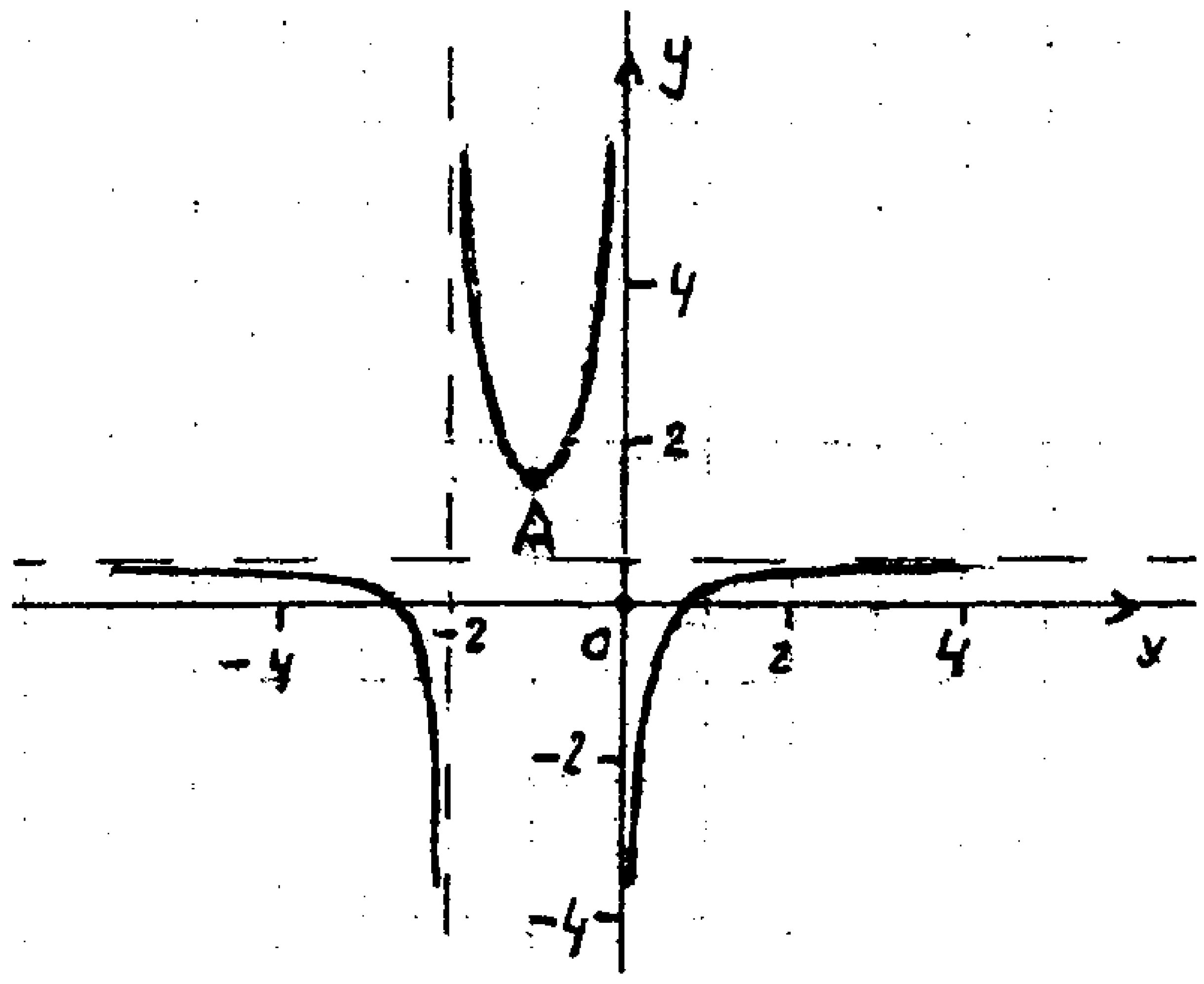
2. а) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \ln|x+1| + \ln(x^2 - 4x + 5) + 4\,arctg(x-2) + C.$

2. б) $-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + C.$

3. $$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\ln 3}\cdot n!\cdot\left\{\frac{x^2}{n}\cdot\left[\frac{1}{(x-1/2)^n} + \frac{1}{(x+3/4)^n}\right] - \frac{2x}{n-1}\cdot\left[\frac{1}{(x-1/2)^{n-1}} + \frac{1}{(x+3/4)^{n-1}}\right] + \frac{1}{n-2}\cdot\left[\frac{1}{(x-1/2)^{n-2}} + \frac{1}{(x+3/4)^{n-2}}\right]\right\}.$$

4. $$f(x) = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-4)\cdot\pi^{k-2}}{(k-1)!}\left[\pi\cos\frac{\pi k}{2} + (k-1)\sin\frac{\pi k}{2}\right]\cdot(x-1/2)^k + o\left((x-1/2)^n\right).$$

5. а) $y'(x) = 2\dfrac{(x+1)}{x^2(x+2)^2}$; $\quad y''(x) = -2\dfrac{(3x^2+6x+4)}{x^3(x+2)^3}$;



асимптоты: $y = +\dfrac{1}{2}$ при $x \to \pm\infty$,

$x = 0$ при $x \to 0 \pm 0$,

$x = -2$ при $x \to -2 \pm 0$;

A: минимум, $x_A = -1$, $y(x_A) = \dfrac{3}{2}$, $y'(x_A) = 0$.

5. б) $y'(x) = -2 + \dfrac{x\cdot sign(|x-1|)}{\sqrt{|x^2-1|}}$; $\quad y''(x) = -\dfrac{1}{|x^2-1|^{3/2}}$;

асимптоты: $y = -3x$ при $x \to -\infty$,

$y = -x$ при $x \to +\infty$;

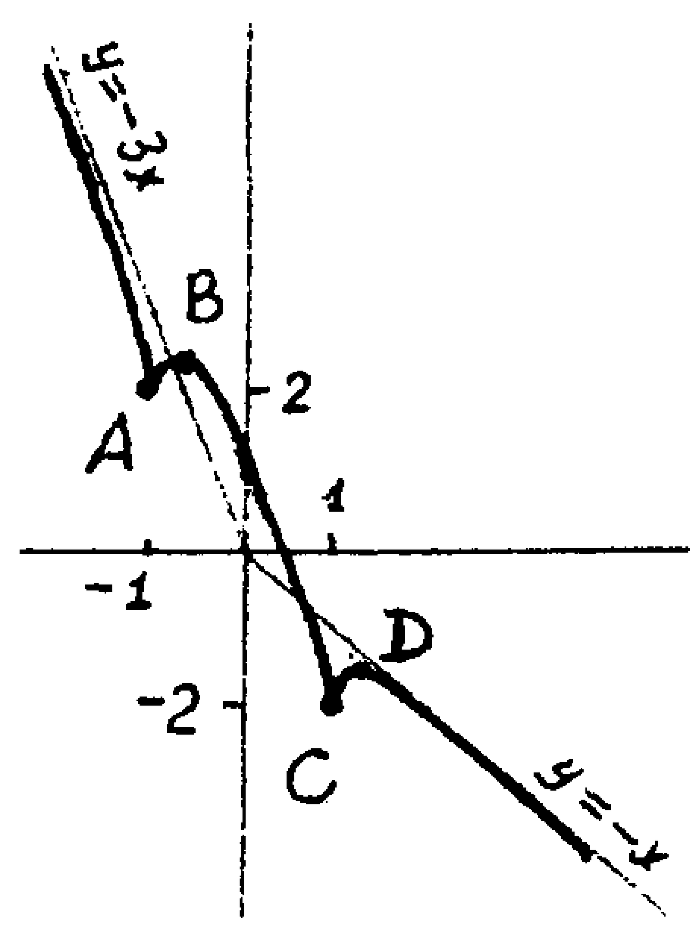
A: минимум, $x_A = -1$, $y(x_A) = 2$, $y'(x_A \pm 0) = \pm\infty$.

B: максимум, $y(x_B) = -2/\sqrt{5}$, $y(x_B) = \sqrt{5}$, $y'(x_B) = 0$;

C: минимум, $x_C = 1$, $y(x_C) = -2$, $y'(x_C \pm 0) = \pm\infty$;

D: максимум, $x_D = 2/\sqrt{3}$, $y(x_D) = -\sqrt{3}$, $y'(x_D) = 0$.

A и C - точки возврата.



6. При $x \to 0$: $\quad \ln(e^x + \sin 2x) = 3x - 4x^2 + \dfrac{19}{3}x^3 + o(x^3)$;

$\cos(\sin 2x) = 1 - 2x^2 + \dfrac{10}{3}x^4 + o(x^4)$: $\qquad ch(sh2x) = 1 + 2x^2 + \dfrac{10}{3}x^4 + o(x^4)$

$$\frac{\left[3x-4x^2+\frac{19}{3}x^3+o(x^3)\right]-\left[3x+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right]-\left[1-4x^2+o(x^3)\right]+\left[1-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]}{\left\{\left[1-2x^2+\frac{10}{3}x^4+o(x^4)\right]-\left[1+2x^2+\frac{10}{3}x^4+o(x^4)\right]\right\}/x+\left[4x+\frac{64}{3}x^3+o(x^4)\right]}\to\frac{9}{128}.$$

7. При $x\to 0$: $(1+x)^{1/x}=e\cdot\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right]$;

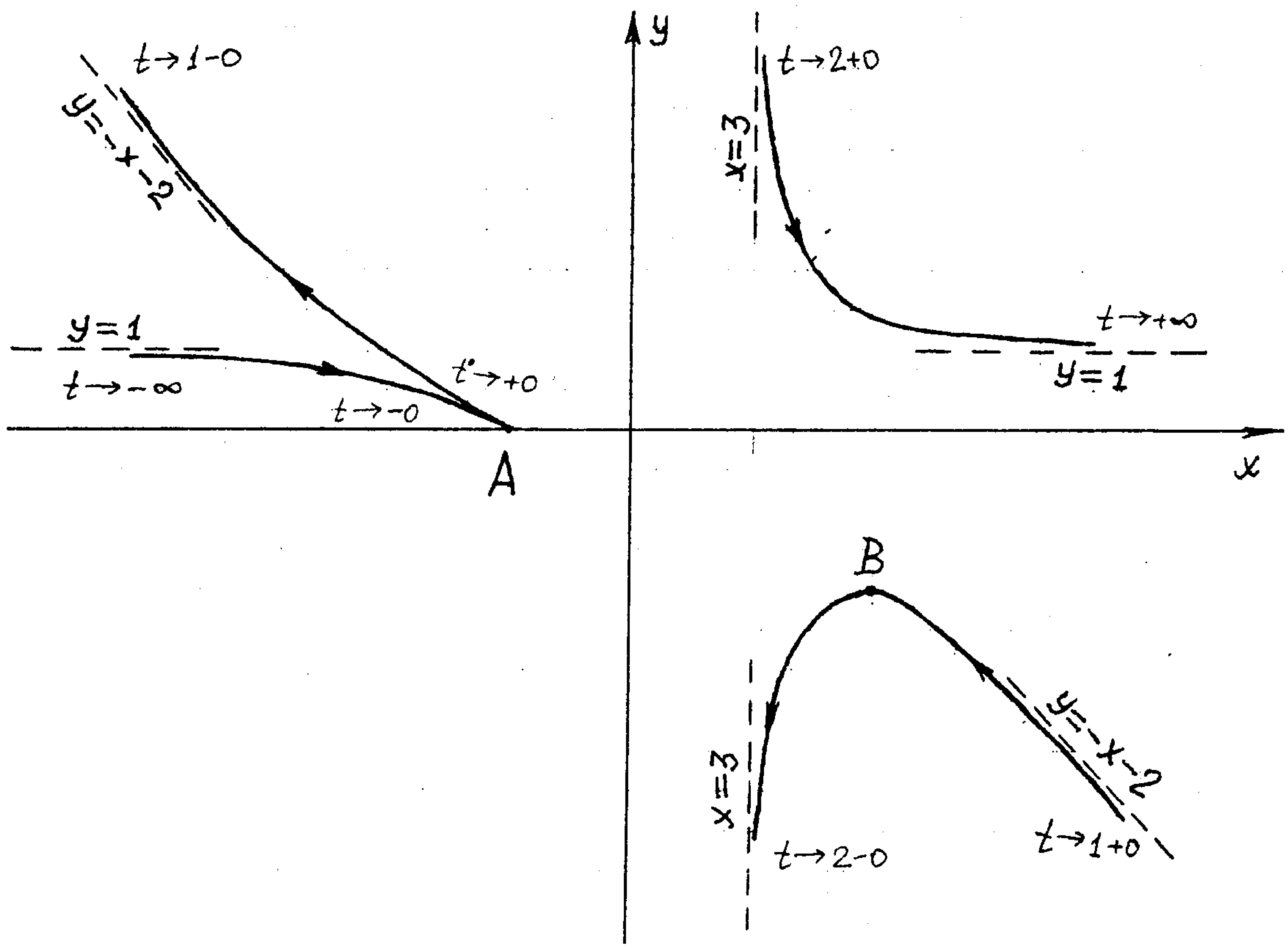
$$\left(\frac{\frac{1}{e}\cdot e\cdot\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right]-\left[\frac{7}{12}x^2-x^3+o(x^3)\right]}{\left[1+\frac{7}{12}x^2+o(x^3)\right]-\left[1+x^3+o(x^3)\right]}\right)^{\frac{1}{x+o(x)}}=\to e^{15/14}.$$

8. $\dot{x}(t)=\dfrac{t\cdot(t-2)}{(t-1)^2}$; $\dot{y}(t)=-3\dfrac{t\cdot(t-4/3)}{(t-1)^2(t-2)^2}$;

$y'_x(t)=-3\dfrac{(t-4/3)}{(t-2)^3}$; $y''_{xx}(t)=6\dfrac{(t-1)^3}{t\cdot(t-2)^5}$;

асимптоты: $y=1$ при $t\to\pm\infty$;
$y=-x-2$ при $t\to+1\pm 0$;
$x=3$ при $t\to 2\pm 0$,

A: точка минимума, $t_A=0$, $x(t_A)=-1$, $y(t_A)=0$, $y'_x(t_A)=-1/2$;
B: точка максимума, $t_B=4/3$, $x(t_B)=13/3$, $y(t_B)=-8$, $y'_x(t_B)=0$;
A - точка возврата.



9. Последовательность монотонно возрастает ($x_{n+1}>x_n$) и ограничена ($x_n<\sqrt{6}+1$); $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

Математический анализ, 1 курс, 1 семестр, 2004-2005. **Вариант 4**

1. $\bar{r}_0 = (1,1)$, $k_{\max} = 1$, $\bar{r}_{цк} = (1,\ 2)$.

2. а) $x - \frac{18}{7}\ln|x+3| - \frac{3}{4}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{7}\sqrt{3}\, arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

2. б) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + \ln|x| + C.$

3. $y^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cdot\{(4x^2-2x+1)\cdot[\cos(2x+\pi n/2) - 2^n\cos(4x+\pi n/2)] +$
$+ n\cdot(4x-1)\cdot[\sin(2x+\pi n/2) - 2^{n-1}\sin(4x+\pi n/2)] +$
$+ n\cdot(n-1)\cdot[-\cos(2x+\pi n/2) + 2^{n-2}\cos(4x+\pi n/2)]\}.$

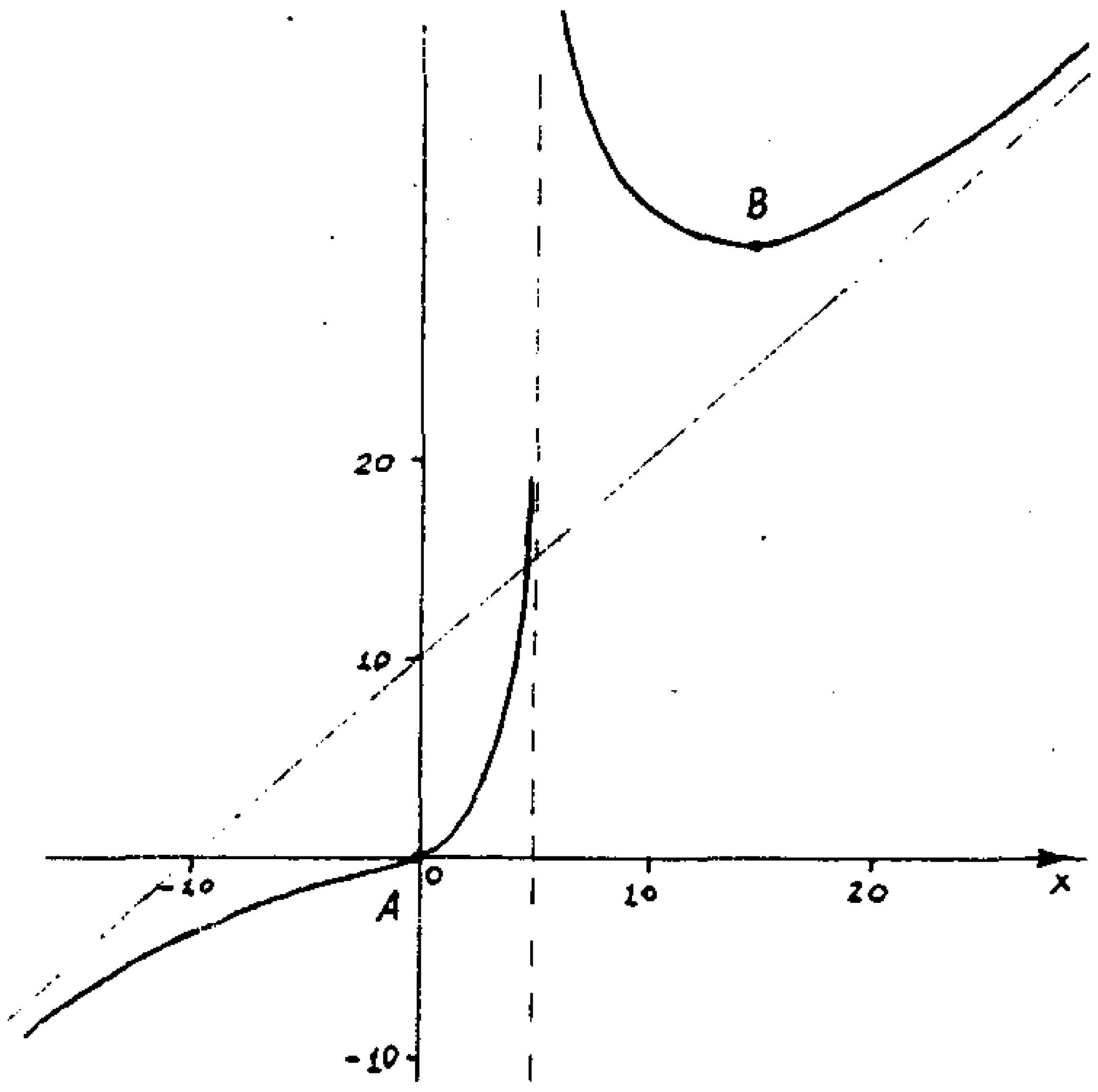
4. $f(x) = \frac{5}{3} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{k-1}}{3^{2k+1}}\cdot\left(9C_{-1/2}^{k-1} + 10C_{-1/2}^{k}\right)\right]\cdot(x-5)^k + o((x-5)^n),.\ \ C_{-1/2}^{k} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$

5. а) $y'(x) = \frac{x^2(x-15)}{(x-5)^3}$; $y''(x) = 150\frac{x^3}{(x-5)^4}$;

асимптоты: $y = x+10$ при $x\to\pm\infty$,
$x = +5$ при $x\to +5\pm 0$,

A: перегиб, $x_A = 0$, $y(x_A) = 0$, $y'(x_A) = 0$.

B: минимум, $x_B = 15$, $y(x_B) = \frac{135}{4}$, $y'(x_B) = 0$.



5. б) $y'(x) = -1 + \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}$; $y''(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x-3)^4}}$;

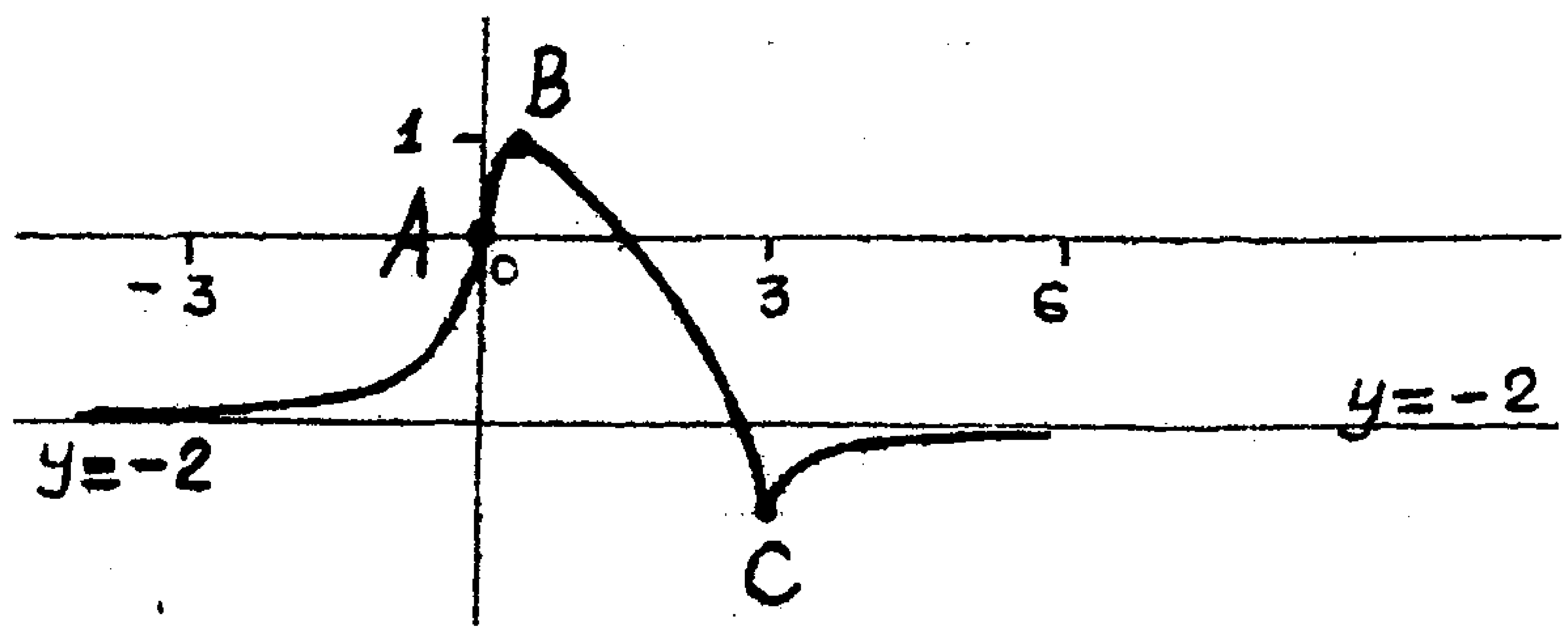
асимптоты: $y = -2$ при $x\to\pm\infty$,

A: перегиб, $x_A = 0$, $y(x_A) = 0$, $y'(x_A\pm 0) = +\infty$;

B: максимум, $x_B = \frac{1}{3}$, $y(x_B) = 1$, $y'(x_B) = 0$;

C: минимум, $x_C = 3$, $y(x_C) = -3$, $y'(x_C\pm 0) = \pm\infty$;

C - точка возврата.



6. При $x\to 0$: $\sqrt{3-2\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$; $e^{arctg^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$;

$\sqrt[3]{1+tg\,x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + o(x^3)$; $\sqrt[3]{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{162}x^3 + o(x^3)$;

$$\frac{\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\right]-\left[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]+\left[-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right]}{[2x+o(x)]\cdot\left\{\left[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{14}{81}x^3+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{162}x^3+o(x^3)\right]\right\}}\to-\frac{3}{4}.$$

7. При $x\to 0$:

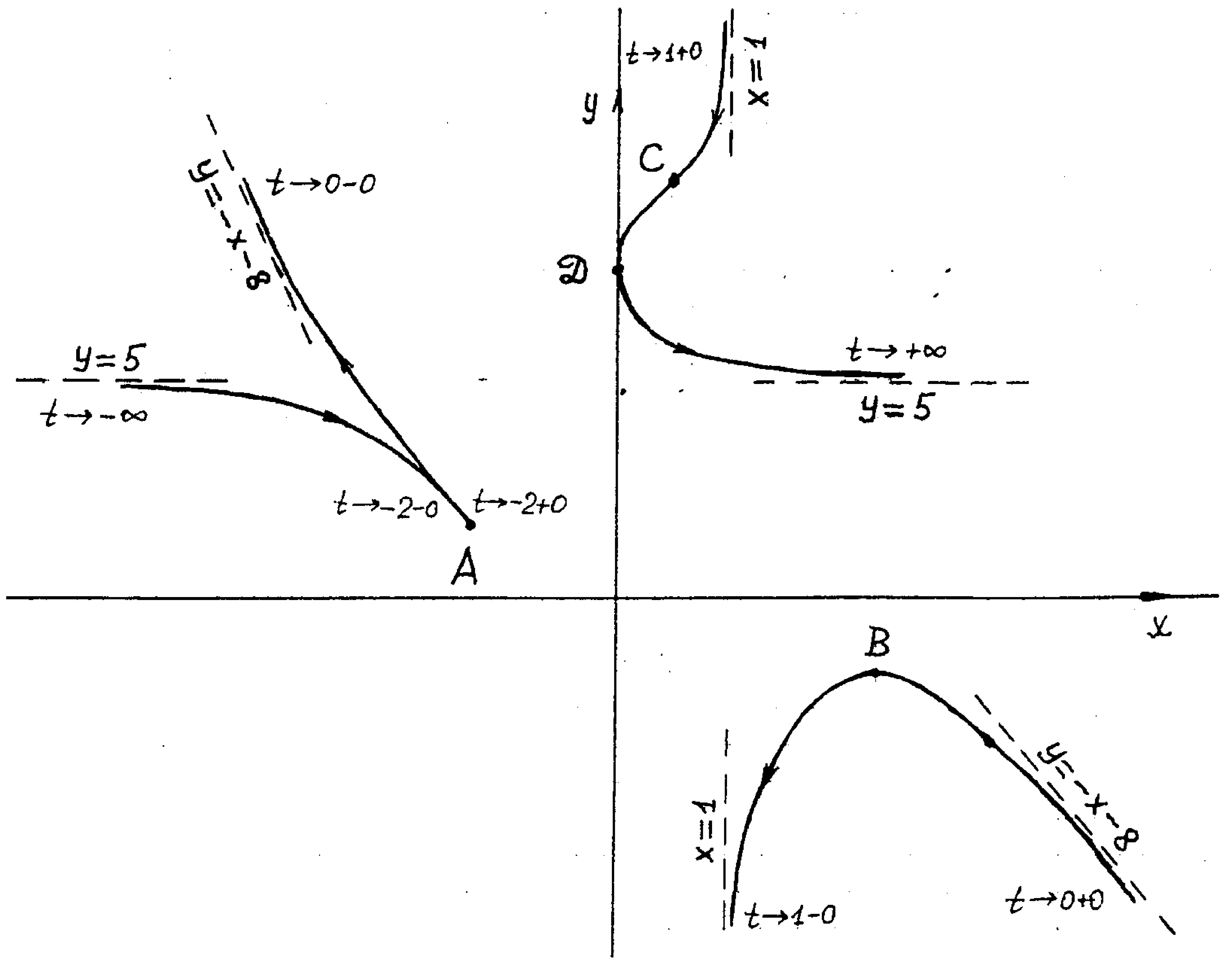
$$\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+o(x^6)\right)-2+2\cdot\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^6)\right)}{\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+o(x^6)\right)}\right)^{\frac{1}{x^2+o(x^2)}}\Longrightarrow e^{13/15}.$$

8. $\dot{x}(t)=\dfrac{(t+2)\cdot(t-2)}{t^2}$; $\quad\dot{y}(t)=-5\dfrac{(t+2)(t-2/5)}{t^2(t-1)^2}$;

$y'_x(t)=-5\dfrac{t-2/5}{(t-1)^2(t-2)}$; $\quad y''_{xx}(t)=10\dfrac{t^3(t-8/5)}{(t-1)^3(t-2)^3(t+2)}$;

асимптоты: $y=5$ при $t\to\pm\infty$;
$y=-x-8$ при $t\to 0\pm 0$;
$x=1$ при $t\to 1\pm 0$,

A: точка минимума, $t_A=-2$, $x(t_A)=-8$, $y(t_A)=4$, $y'_x(t_A\pm 0)=-1/3\mp 0$.
B: точка максимума, $t_B=2/5$, $x(t_B)=32/5$, $y(t_B)=-20$, $y'_x(t_B)=0$;
C: точка перегиба, $t_C=8/5$, $x(t_C)=1/10$, $y(t_C)=35/2$, $y'_x(t_C\pm 0)=125/3\mp 0$;
D: точка поворота, $t_D=2$, $x(t_D)=0$, $y(t_D)=12$, $y'_x(t_D\pm 0)=\mp\infty$;
A: точка возврата.



9. Последовательность монотонно возрастает ($x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n^2-x_{n-1}^2}{2}$) и ограничена ($x_n<1$); $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1/2$.