Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения** **Год: 1998/99**

Вариант: **1** **Курс:** **2** **Семестр:** **весенний**

---

1. Найти все действительные решения уравнения
$$y^{IV}+3y''-4y=10\sin 2x+6e^{2x}.$$

---

2. Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+z,\\ \dot{y}=-x-2y+3z, \quad (\lambda_{1,2,3}=-1).\\ \dot{z}=-y+z,\end{cases}$$

---

3. Решить уравнение
$$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=xe^x.$$

---

4. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y)=\int_1^2 (3x^4(y')^2-34x^3yy'+3x^2y^2-84x^3y)\,dx, \quad y(1)=2, \quad y(2)=10.$$

---

5. Найти все решения, исследовать на особые решения, начертить интегральные кривые уравнения
$$4x^2(y')^3-3xy'+y=0.$$

---

6. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.
$$\begin{cases}\dot{x}=e^{-x+4y}-1,\\ \dot{y}=\operatorname{arctg}\left(4x-y-\dfrac{5x^2}{4}\right).\end{cases}$$

---

7. Найти все решения уравнения
$$(x-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y^2+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$
и решить задачу Коши $u=\dfrac{z}{2y^2}$ при $x=y^2$, $(x>0, y>0)$.

---

8. Решить задачу Коши
$$x(yy''-(y')^2)+y'(y+y')\sin x=0, \qquad y(0)=-1, \quad y'(0)=1.$$

---

9. Написать такое дифференциальное уравнение $F(x,y,y')=0$, для которого каждая прямая, не параллельная оси y и отстоящая от начала координат на расстоянии 1, является графиком решения. Какие ещё кривые являются графиками решений этого уравнения?

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: $\boxed{\textbf{Дифференциальные уравнения}}$ **Год: 1998/99**

Вариант: $\boxed{\textbf{2}}$ **Курс:** $\boxed{\textbf{2}}$ **Семестр:** $\boxed{\textbf{весенний}}$

---

1. Найти все действительные решения уравнения
$$y''' - 2y'' + 2y' = 4x + \cos x.$$

---

2. Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 3z, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 5z, \quad (\lambda_1 = -3,\, \lambda_{2,3} = -2 \pm 2i). \\ \dot{z} = -x - 3y + z, \end{cases}$$

---

3. Решить уравнение $\qquad x(x+1)y'' + 2(2x+1)y' + 2y = \cos x.$

---

4. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y) = \int_1^2 (x^2(y')^2 - 10xyy' - 3y^2 - 4y)\,dx, \qquad y(1) = 4, \quad y(2) = 7.$$

---

5. Найти все решения, исследовать на особые решения, начертить интегральные кривые уравнения $\qquad y(y')^3 - 3xy' + 2y = 0.$

---

6. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x - y), \\ \dot{y} = e^{x+y+2xy} - 1. \end{cases}$$

---

7. Найти все решения уравнения
$$(2x + y^2 + z)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + (z - 2y + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
и решить задачу Коши $u = \dfrac{x - e^y}{2}$ при $x - y^2 - z = 0$, ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

---

8. Решить задачу Коши
$$yy'' = (4(y')^4 - (y')^2)e^y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

---

9. Рассмотрим при $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ дифференциальное уравнение $y' = a(t)b(y)$, где $a(t)$ определена и непрерывна на $(\alpha;\beta)$, $b(y)$ определена, непрерывна и не обращается в 0 на (γ,δ) . Доказать, что при любых начальных данных задача Коши для этого уравнения имеет и притом единственное решение.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения** **Год: 1998/99**

Вариант: **3** **Курс:** **2** **Семестр:** **весенний**

---

1. Найти все действительные решения уравнения
$$y^{IV} + y'' = \sin^2 \frac{x}{2} \, .$$

---

2. Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \quad (\lambda_1 = 0, \, \lambda_{2,3} = -1). \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z, \end{cases}$$

---

3. Решить уравнение $\qquad (x-1)y'' - 2xy' + (x+1)y = e^{2x}.$

---

4. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y) = \int_1^2 (x^3(y')^2 - 11x^2yy' - 3xy^2 - 10x^2y)\, dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 10.$$

---

5. Найти все решения, исследовать на особые решения, начертить интегральные кривые уравнения $\qquad 8y^2(y')^3 + 6y'x - 3y = 0.$

---

6. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + x + 4y), \\ \dot{y} = \arcsin\left(x + y - \dfrac{x^2}{4}\right). \end{cases}$$

---

7. Найти все решения уравнения
$$x(y-z)\frac{\partial u}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial u}{\partial y} + z(y+z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
и решить задачу Коши $u = \dfrac{y}{z}$ при $x = y$, $(y > 0, z > 0)$.

---

8. Решить задачу Коши
$$2(yy'' - (y')^2) = ((y')^2 - 2y'y)e^{x^2}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2} \, .$$

---

9. Рассмотрим при $0 \leqslant t < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ дифференциальное уравнение $y' = a(t)y + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные на $[0; +\infty)$ непрерывные функции. Пусть $a(t) \geqslant 1$ и $|b(t)| \leqslant 1$ для всех t . Доказать, что существует и притом единственное решение $y(t)$ этого уравнения, которое ограничено на всей полупрямой.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения** **Год: 1998/99**

Вариант: **4** **Курс:** **2** **Семестр:** **весенний**

---

1. Найти все действительные решения уравнения
$$y''' - 16y' = 48x^2 + 2\cos^2 2x.$$

---

2. Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \qquad (\lambda_1 = 1,\, \lambda_{2,3} = -2 \pm i). \\ \dot{z} = -2x - 4y - z, \end{cases}$$

---

3. Решить уравнение $\qquad x(x-1)y'' + 2(2x-1)y' + 2y = \sin x.$

---

4. Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y) = \int_1^2 (x^2(y')^2 - 14xyy' - y^2 - 8xy)\,dx, \qquad y(1) = 2, \quad y(2) = 6.$$

---

5. Найти все решения, исследовать на особые решения, начертить интегральные кривые уравнения $\qquad 2x^2(y')^3 - xy(y')^2 + 1 = 0.$

---

6. Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-\operatorname{sh}(x+y)} - 1, \\ \dot{y} = 2xy + x - y. \end{cases}$$

---

7. Найти все решения уравнения
$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y(2z - y)\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
и решить задачу Коши $u = 1 - \dfrac{z}{y}$ при $z = 2x$, $(x > 0, y > 0)$.

---

8. Решить задачу Коши
$$yy'' = ((y')^5 + (y')^2)\,\operatorname{th} y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

---

9. Рассмотрим при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $-\infty < y < +\infty$ дифференциальное уравнение
$$y' = a(t)|y| + b(t),$$
где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные на $[a; b]$ непрерывные функции. Доказать, что задача Коши для этого уравнения при любых начальных данных имеет и притом единственное решение, определённое при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.
