Вариант 1

---

1. $\boxed{3}$ $e^{\frac{1}{18}}$.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x = 0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^{11} + o(x^{11}) + x^{10}(xg(x)) = o(x^{10}) + o(x^{10}) + o(x^{10}) = o(x^{10})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^{11} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (\triangle x)^{10} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{-1/4}^{n-1}}{2^{4n-3}} + \frac{C_{-1/4}^{n}}{2^{4n+1}} \right) x^{2n}, \qquad R_{cx} = 4.$

---

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится неравномерно, на E_2 ряд сходится равномерно.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \frac{4\pi R^5}{5}$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 5$, $\min = -5$.

$A\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{dx^2}{2} + \frac{2}{9}dy^2\right)$, где $L = 2x - y + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -\frac{5}{2}$ в точке максимума, $\lambda = \frac{5}{2}$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $2x - y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Получим $16 + 9 = C^2$, $C = \pm 5$. Значит $\max = 5$, $\min = -5$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{4} + \frac{yy_0}{9} = 1$ и $\frac{2x}{5} - \frac{y}{5} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \frac{1}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot \cos\pi(2n+1)x$, сходится равномерно к 2-периодическому продолжению функции $f(x) = |x|$, $|x| \leqslant 1$. При $x = 0$ имеем: $\frac{1}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} = 0$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\qquad \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > 1$,

сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -4 & 0 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$.

10. $\boxed{3}$ $11x+4y-4z+1=0$. В уравнение пучка $\lambda(x-y+z-1)+\mu(2x+3y-3z+2)=0,\ \lambda^2+\mu^2\neq 0$, подставим координаты точки M, получим $3\lambda-5\mu=0$. Возьмём $\lambda=5$, $\mu=3$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_2'}{\sqrt{7}}, \\ x_2 = \frac{x_3'+x_2'}{\sqrt{7}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho = 2\sqrt{5}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho = \frac{|ax_0'+by_0'+cz_0'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi = (4,1,-1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = 5$,
$\rho = \frac{|4x_0+y_0-z_0+5|}{|\vec{n}|} = 2\sqrt{5}$.

---

13. $\boxed{4}$ $w = e^{iz}$, $w^2+iw+2=0$, $w_1 = i$, $w_2 = -2i$;
$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,
$z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{dz}{\operatorname{sh}\frac{3}{z}+\operatorname{sh}\frac{2}{z}} = \frac{z}{5} - \frac{7}{30z} + o\left(\frac{1}{z}\right),\ z\to\infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{7}{30}$, $I = -2\pi i\cdot\frac{7}{30} = -\frac{7}{15}\pi i$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy - y^3, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{35}e^{6x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Вариант 1

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + 2xy' - 6y = -4x$ — уравнение Эйлера;
$y = C_1x^2 + C_2x^{-3} + x$ — экстремали;
$\hat{y} = x + x^2$ — допустимая экстремаль.

Вариант 2

---

1. $\boxed{3}$ $e^{-\frac{7}{8}}$.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^{12} + o(x^{12}) + x^{11}(xg(x)) = o(x^{11}) + o(x^{11}) + o(x^{11}) = o(x^{11})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^{12} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (\triangle x)^{11} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-2/3}^{n-2}}{2^{3n-4}} + \frac{C_{-2/3}^{n-1}}{2^{3n-1}} \right) x^{2n}, \qquad R_{cx} = 2\sqrt{2}$.

---

4. $\boxed{3}$ Сходится к $f(x) = x^2$ равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$R_n(x) = \sqrt{n}\,\mathrm{sh}\,\frac{x^2}{\sqrt{n}} - x^2 > 0$, $R_n'(x) = 2x\left(\mathrm{ch}\,\frac{x^2}{\sqrt{n}} - 1\right) > 0$. Для всех $x \in E_1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|R_n(x)| \leqslant R_n(1) = \sqrt{n}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(n^{1/4})| = +\infty$, сходимость на E_2 неравномерная.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \pi\left(R^2 + \frac{R^4}{2}\right)$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 10$, $\min = -10$.

$A\left(\frac{7}{5}, \frac{12}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{7}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{2}{7}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2\right)$, где $L = 2x + 3y + \lambda\left(\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{8} - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -5$ в точке максимума, $\lambda = 5$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $2x + 3y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{8} = 1$. Получим $28 + 72 = C^2$, $C = \pm 10$. Значит $\max = 10$, $\min = -10$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{7} + \frac{yy_0}{8} = 1$ и $\frac{2x}{10} + \frac{3y}{10} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{7}{5}, \frac{12}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{7}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} \cdot \sin(2n+1)x$, сходится равномерно к 2π-периодическому продолжению функции $f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x - \pi, & -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ При $x = \frac{\pi}{2}$ имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{6}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{4}$,

сходится условно при $\frac{1}{8} < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{8}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & -5 & 6 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ -7 & 5 & -6 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} t_3.$

---

10. $\boxed{3}$ $9x - 5y - z - 10 = 0$. Плоскость $\lambda(3x - 2y + 2z - 1) + \mu(2x - y - z - 3) = 0$ параллельна вектору $\vec{e}(1, 2, -1) \Leftrightarrow (3\lambda + 2\mu) + 2(-2\lambda - \mu) - (2\lambda - \mu) = 0 \Leftrightarrow -3\lambda + \mu = 0$. Возьмём $\lambda = 1$, $\mu = 3$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_1'}{\sqrt{8}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{7}}, \\ x_3 = \frac{x_3' + x_1'}{\sqrt{8}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1| \cdot |\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (4, 1, -1)^T$ и $\eta = (1, 1, -1)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$. Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T \Gamma^{-1} \xi = 5$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T \Gamma^{-1} \eta = 2$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \xi^T \Gamma^{-1} \eta = 2$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

---

13. $\boxed{4}$ $w = e^{iz}$, $3w^2 + 2w - 1 = 0$, $w_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = -1$;
$z_1 = 2\pi k + i \ln 3$,
$z_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{z}{\operatorname{ch}\frac{1}{z} + \operatorname{ch}\frac{4}{z}} = \frac{z}{2} - \frac{17}{8z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{17}{8}$, $I = -2\pi i \cdot \frac{17}{8} = -\frac{17\pi i}{4}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^2 - \frac{y^4}{2}, \quad y = 0.$

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{5}{2} x e^{-x} - \frac{2}{3} e^{2x}.$

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{11t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}.$

---

18. $\boxed{4}$ $x^2 y'' + xy' + 4y = 16x^2$ — уравнение Эйлера;
$y = C_1 \sin(2 \ln x) + C_2 \cos(2 \ln x) + 2x^2$ — экстремали;
$\hat{y} = 2x^2$ — допустимая экстремаль.

Вариант 3

---

1. $\boxed{3}$ $e^{\frac{8}{5}}$.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^{17} + o(x^{17}) + x^{16}(xg(x)) = o(x^{16}) + o(x^{16}) + o(x^{16}) = o(x^{16})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^{17} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (\triangle x)^{16} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{-2/3}^{n-1}}{3^{3n-1}} + \frac{C_{-2/3}^{n}}{3^{3n+2}} \right) x^{2n}, \qquad R_{cx} = 3\sqrt{3}$.

---

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится неравномерно, на E_2 ряд сходится равномерно.

---

5. $\boxed{4}$ $I = 4\pi$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 9$, $\min = -9$.

$A\left(8, \frac{1}{3}\right)$ — точка максимума, $B\left(-8, -\frac{1}{3}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{dx^2}{36} + 2dy^2\right)$, где $L = x + 3y + \lambda\left(\frac{x^2}{72} + y^2 - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -\frac{9}{2}$ в точке максимума, $\lambda = \frac{9}{2}$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $x + 3y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{72} + y^2 = 1$. Получим $72 + 9 = C^2$, $C = \pm 9$. Значит $\max = 9$, $\min = -9$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{72} + yy_0 = 1$ и $\frac{x}{9} + \frac{3y}{9} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(8, \frac{1}{3}\right)$ — точка максимума, $B\left(-8, -\frac{1}{3}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \frac{1}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot \cos \pi(2n+1)x$, сходится равномерно к 2-периодическому продолжению функции $f(x) = |x|$, $|x| \leqslant 1$. При $x = 0$ имеем: $\frac{1}{2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} = 0$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\qquad \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$, сходится условно при $\frac{1}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 4 & 1 & 0 & -5 & 7 \\ 9 & -2 & 0 & 1 & -6 & 8 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ -9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$.

---

10. $\boxed{3}$ $15x+16y-5z+11=0$. В уравнение пучка $\lambda(3x-2y+z-1)+\mu(2x+3y-z+2)=0,\ \lambda^2+\mu^2\neq 0$, подставим координаты точки M, получим $6\lambda-\mu=0$. Возьмём $\lambda=1$, $\mu=6$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_1'}{\sqrt{8}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{3}}, \\ x_3 = \frac{x_3'+x_1'}{\sqrt{8}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$. $\quad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k=3$, $\sigma=1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho=\sqrt{65}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho=\frac{|ax_0'+by_0'+cz_0'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi=(1,2,-1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2=\xi^T\Gamma^{-1}\xi=\frac{13}{5}$,

$\rho=\frac{|x_0+2y_0-z_0-11|}{|\vec{n}|}=\sqrt{65}$.

---

13. $\boxed{4}$ $w=e^{iz}$, $2w^2-w-1=0$, $w_1=1$, $w_2=-\frac{1}{2}$;

$z_1=2\pi k$,

$z_2=-\pi+2\pi k+i\ln 2$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z)=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}+\operatorname{sh}\frac{2}{z}}=\frac{z}{3}-\frac{1}{6z}+o\left(\frac{1}{z}\right),\ z\to\infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-c_{-1}=\frac{1}{6}$,
$I=-2\pi i\cdot\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{-\pi i}{3}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x=Cy^3-4y^2,\quad y=0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{5}{2}x\sin x-e^{2x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}+C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-2t}+C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y''+xy'-y=-3x^2$ — уравнение Эйлера;

$y=\frac{C_1}{x}+C_2x-x^2$ — экстремали;

$\hat{y}=-x^2$ — допустимая экстремаль.

Вариант 4

---

1. $\boxed{3}$ e^{-1}.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x = 0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = \frac{x^{17}}{3} + o(x^{17}) + x^{16}(2xg(x)) = o(x^{16}) + o(x^{16}) + o(x^{16}) = o(x^{16})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{2(\triangle x)^{17} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} 2(\triangle x)^{16} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^4}{4} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-2/5}^{n-2}}{2^{5n-8}} + \frac{C_{-2/5}^{n-1}}{2^{5n-3}} \right) x^{4n}, \qquad R_{cx} = 2\sqrt[4]{2}$.

---

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится равномерно, на E_2 ряд сходится неравномерно.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \frac{\pi R^4}{4}$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 6$, $\min = -6$.

$A\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{2}{27}dx^2 + 2dy^2\right)$, где $L = x + 3y + \lambda\left(\frac{x^2}{27} + y^2 - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -3$ в точке максимума, $\lambda = 3$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $x + 3y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$. Получим $27 + 9 = C^2$, $C = \pm 6$. Значит $\max = 6$, $\min = -6$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{27} + yy_0 = 1$ и $\frac{x}{6} + \frac{3y}{6} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$, сходится равномерно к 4-периодическому продолжению функции $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x - 2, & -2 \leqslant x \leqslant -1. \end{cases}$ При $x = 1$ имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} = 1$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{3}$, сходится условно при $\frac{1}{6} < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$, расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{6}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 8 & -1 & 5 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \\ -4 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$.

---

10. $\boxed{3}$ $3x+5y-7z-3=0$. Плоскость $\lambda(x+y+z-1)+\mu(2x+3y-3z-2)=0$ параллельна вектору $\vec{e}(-1,2,1) \Leftrightarrow -(\lambda+2\mu)+2(\lambda+3\mu)+(\lambda-3\mu)=0 \Leftrightarrow 2\lambda+\mu=0$. Возьмём $\lambda=-1$, $\mu=2$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_2'}{\sqrt{12}}, \\ x_2 = \frac{x_3'+x_2'}{\sqrt{12}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{11}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{rg}\, k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1|\cdot|\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (2,-1,1)^T$ и $\eta = (1,1,2)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$. Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = 5$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T\Gamma^{-1}\eta = 8$, $(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = 4$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

---

13. $\boxed{4}$ $w = e^{iz}$, $8w^2 - 14iw - 6 = 0$, $w_1 = i$, $w_2 = \frac{3i}{4}$;

$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln\frac{3}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{z}{\sin\frac{3}{z}+\sin\frac{2}{z}} = \frac{z}{5} + \frac{7}{30z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\mathrm{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{7}{30}$,

$I = -2\pi i \cdot \left(-\frac{7}{30}\right) = \frac{7}{15}\pi i$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^3 - 4y^5, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - xe^{-x} + \frac{1}{24}e^{5x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + xy' - y = 2x$ — уравнение Эйлера;

$y = C_1 x + C_2\frac{1}{x} + x\ln x$ — экстремали;

$\hat{y} = x\ln x$ — допустимая экстремаль.

Вариант 5

1. $\boxed{3}$ $e^{\frac{4}{21}}$.

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^9 + o(x^9) + x^8(xg(x)) = o(x^8) + o(x^8) + o(x^8) = o(x^8)$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^9 g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (\triangle x)^8 g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{1}{8} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{-3/5}^{n-1}}{2^{5n-2}} + \frac{C_{-3/5}^{n}}{2^{5n+3}} \right) x^{4n}, \qquad R_{cx} = 2\sqrt[4]{2}$.

4. $\boxed{3}$ Сходится к $f(x) = x^3$ равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ выполняется $|t - \operatorname{arctg} t| \leqslant \frac{|t|^3}{3}$. Тогда при $x \in E_1$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$R_n(x) = \left| x^3 - n^2 \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n^2} \right| = n^2 \left| \frac{x^3}{n^2} - \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{3} n^2 \left(\frac{x^3}{n^2} \right)^3 \leqslant \frac{1}{3n^4} \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(n^{2/3}) = +\infty$, сходимость на E_2 неравномерная.

5. $\boxed{4}$ $I = -\pi$.

6. $\boxed{4}$ $\max = 10$, $\min = -10$.

$A\left(\frac{9}{5}, -\frac{32}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{9}{5}, \frac{32}{5}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda \left(\frac{2}{9} dx^2 + \frac{1}{32} dy^2 \right)$, где $L = 2x - y + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} - 1 \right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -5$ в точке максимума, $\lambda = 5$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $2x - y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$. Получим $36 + 64 = C^2$, $C = \pm 10$. Значит $\max = 10$, $\min = -10$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{64} = 1$ и $\frac{2x}{10} - \frac{y}{10} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{9}{5}, -\frac{32}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{9}{5}, \frac{32}{5}\right)$ — точка минимума.

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \frac{\pi}{4} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cdot \cos 2(2n+1)x$, сходится равномерно к π-периодическому продолжению функции $f(x) = |x|$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. При $x = 0$ имеем: $\frac{\pi}{4} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} = 0$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\qquad \frac{\pi^2}{8} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{6}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$,

сходится условно при $\frac{1}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -5 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 1 & -9 & 2 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} t_3.$

---

10. $\boxed{3}$ $5x - 15y + 7z + 19 = 0$. В уравнение пучка $\lambda(x + y - z - 1) + \mu(2x - 3y + z + 4) = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, подставим координаты точки M, получим $4\lambda + 3\mu = 0$. Возьмём $\lambda = -3$, $\mu = 4$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_2'}{\sqrt{11}}, \\ x_2 = \frac{x_3' + x_2'}{\sqrt{11}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{3}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho = \sqrt{5}$. Приме́ним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho = \frac{|ax_0' + by_0' + cz_0' + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi = (2, -1, 1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2 = \xi^T \Gamma^{-1} \xi = 5$, $\rho = \frac{|2x_0 - y_0 + z_0 + 2|}{|\vec{n}|} = \sqrt{5}$.

---

13. $\boxed{4}$ $w = e^{iz}$, $w^2 - 2iw + 3 = 0$, $w_1 = 3i$, $w_2 = -i$; $z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln 3$, $z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z} + \sin\frac{3}{z}} = \frac{z}{4} + \frac{7}{24z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{7}{24}$,
$I = -2\pi i \cdot \left(-\frac{7}{24}\right) = \frac{7\pi i}{12}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^5 - y^2, \quad y = 0.$

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x\cos x + e^{3x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + xy' - y = -\ln x$ — уравнение Эйлера;
$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \ln x$ — экстремали;
$\hat{y} = \ln x$ — допустимая экстремаль.

Вариант 6

---

1. $\boxed{3}$ $e^{\frac{1}{12}}$.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = \frac{x^{22}}{2} + o(x^{22}) + x^{21}(xg(x)) = o(x^{21}) + o(x^{21}) + o(x^{21}) = o(x^{21})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^{22} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} (\triangle x)^{21} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2}{8} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-3/5}^{n-2}}{2^{5n-7}} + \frac{C_{-3/5}^{n-1}}{2^{5n-2}} \right) x^{2n}, \qquad R_{cx} = 4\sqrt{2}.$

---

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится неравномерно, на E_2 ряд сходится равномерно.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \pi$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 9$, $\min = -9$.

$A\left(\frac{8}{3}, -1\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{1}{4}dx^2 + \frac{2}{9}dy^2\right)$, где $L = 3x - y + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -\frac{9}{2}$ в точке максимума, $\lambda = \frac{9}{2}$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $3x - y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$. Получим $72+9 = C^2$, $C = \pm 9$. Значит $\max = 9$, $\min = -9$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{8} + \frac{yy_0}{9} = 1$ и $\frac{3x}{9} - \frac{y}{9} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{8}{3}, -1\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin 2nx$, сходится неравномерно к π-периодическому продолжению функции $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ При $x = \frac{\pi}{4}$ имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{\pi n}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — равенство Парсеваля.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$,
сходится условно при $\frac{1}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$,
расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{c|c|c} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} t_3$.

10. $\boxed{3}$ $13x + 2y - 9z - 13 = 0$. Плоскость $\lambda(2x+3y-z-2)+\mu(3x+y-2z-3)=0$ параллельна вектору $\vec{e}(1,-2,1) \Leftrightarrow (2\lambda+3\mu)-2(3\lambda+\mu)+(-\lambda-2\mu)=0 \Leftrightarrow 5\lambda+\mu=0$. Возьмём $\lambda=-1$, $\mu=5$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_2'}{\sqrt{5}}, \\ x_2 = \frac{x_3'+x_2'}{\sqrt{5}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{2}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1|\cdot|\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (1,2,-1)^T$ и $\eta = (2,-2,1)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$. Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = \frac{13}{5}$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T\Gamma^{-1}\eta = 5$, $(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = -2$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

---

13. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg}^2 z + 5i\operatorname{tg} z - 4 = 0$, $\operatorname{tg} z = -i$, $\operatorname{tg} z = -4i$, $\operatorname{tg} z = \frac{w-1}{i(w+1)}$, где $w = e^{2zi}$.

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{i}{2}\ln\frac{5}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z} + \operatorname{sh}\frac{4}{z}} = \frac{z}{5} - \frac{13}{30z} + o\left(\frac{1}{z}\right),\ z\to\infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{13}{30}$, $I = -2\pi i\cdot\left(\frac{13}{30}\right) = -\frac{13}{15}\pi i$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy - \frac{y^4}{3}, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x + \frac{1}{10}e^{3x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + xy' + y = 2x^2$ — уравнение Эйлера;

$y = C_1\sin(\ln x) + C_2\cos(\ln x) + \frac{2}{5}x^2$ — экстремали;

$\hat{y} = \frac{2}{5}x^2$ — допустимая экстремаль.

Вариант 7

---

1. $\boxed{3}$ e^{-13}.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^{10} + o(x^{10}) + x^9(20xg(x)) = o(x^9) + o(x^9) + o(x) = o(x^9)$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{20(\triangle x)^{10} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} 20(\triangle x)^9 g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^3}{8} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-3/4}^{n-2}}{2^{4n-5}} + \frac{C_{-3/4}^{n-1}}{2^{4n-1}} \right) x^{3n}, \qquad R_{cx} = 2\sqrt[3]{2}$.

---

4. $\boxed{3}$ Сходится к $f(x) = 0$ равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$f_n'(x) = \frac{\ln(xn)+1}{n^2} = 0$ при $x_n = \frac{1}{ne}$, $|f_n(x_n)| = \frac{1}{en^3}$, $|f_n(+0)| = 0$, $|f_n(1)| = \frac{\ln n}{n^2}$.

$\forall\ x \in E_1\ \forall\ n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{en^3} + \frac{\ln n}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная.

$\lim\limits_{n \to \infty} |f_n(n^2)| = +\infty$. Сходимость на E_2 неравномерная.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \frac{\pi R^5}{2}$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 24$, $\min = -24$.

$A\left(\frac{10}{3}, \frac{11}{6}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{10}{3}, -\frac{11}{6}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{1}{8}dx^2 + \frac{2}{11}dy^2\right)$, где $L = 5x + 4y + \lambda\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{11} - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -12$ в точке максимума, $\lambda = 12$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $5x + 4y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{11} = 1$. Получим $25 \cdot 16 + 16 \cdot 11 = C^2$, $C = \pm 24$. Значит $\max = 24$, $\min = -24$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{11} = 1$ и $\frac{5x}{24} + \frac{4y}{24} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{10}{3}, \frac{11}{6}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{10}{3}, -\frac{11}{6}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$, сходится равномерно к 4-периодическому продолжению функции $f(x) = 1 - |x|$, $|x| \leqslant 2$. При $x = 0$ имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} = 1$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{3}$,

сходится условно при $\frac{1}{6} < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{6}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & 0 & 2 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & -4 & -6 & 2 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_3.$

---

10. $\boxed{3}$ $x - y + 3z + 1 = 0$. Плоскость $\lambda(x + y - z - 1) + \mu(3x + 2y - z - 2) = 0$ параллельна вектору $\vec{e}(-1, 5, 2) \Leftrightarrow -(\lambda + 3\mu) + 5(\lambda + 2\mu) + 2(-\lambda - \mu) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 5\mu = 0$. Возьмём $\lambda = -5$, $\mu = 2$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_1'}{\sqrt{18}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{13}}, \\ x_3 = \frac{x_3' + x_1'}{\sqrt{18}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$.
$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho = 2\sqrt{5}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho = \frac{|ax_0' + by_0' + cz_0' + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi = (3, -1, 1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2 = \xi^T \Gamma^{-1} \xi = 5$, $\rho = \frac{|3x_0 - y_0 + z_0 + 11|}{|\vec{n}|} = 2\sqrt{5}$.

---

13. $\boxed{4}$ $e^{iz} = w$, $w^2 + 4iw - 3 = 0$, $w_1 = -3i$, $w_2 = -i$; $z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln 3$, $z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z} + \sin\frac{4}{z}} = \frac{z}{5} + \frac{13}{30z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{13}{30}$,
$I = -2\pi i \cdot \left(-\frac{13}{30}\right) = \frac{13}{15}\pi i$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^4 - y^4 \ln\left(y^2\right)$, $\quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^{-x} + \frac{1}{8} e^{3x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-9t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-9t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2 y'' + 2xy' - 12y = -12$ — уравнение Эйлера;
$y = C_1 x^3 + C_2 x^{-4} + 1$ — экстремали;
$\hat{y} = 1 - x^3$ — допустимая экстремаль.

Вариант 8

1. $\boxed{3}$ e^3.

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x\neq 0$.

б) $f(x)=\frac{x^8}{5}+o(x^8)+x^7(3xg(x))=o(x^7)+o(x^7)+o(x^7)=o(x^7)$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{3(\triangle x)^8 g(\triangle x)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}3(\triangle x)^7 g(\triangle x)=0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x)=o(x)$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{-1/6}^{n-1}}{2^{6n-5}}+\frac{C_{-1/6}^{n}}{2^{6n+1}}\right)x^{3n}, \qquad R_{cx}=4.$

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится равномерно, на E_2 ряд сходится неравномерно.

5. $\boxed{4}$ $I=0$.

6. $\boxed{4}$ $\max=11$, $\min=-11$.

$A\left(\frac{119}{11},\frac{2}{11}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{119}{11},-\frac{2}{11}\right)$ — точка минимума.

$d^2L=\lambda\left(\frac{2}{119}dx^2+dy^2\right)$, где $L=x+y+\lambda\left(\frac{x^2}{119}+\frac{y^2}{2}-1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda=-\frac{11}{2}$ в точке максимума, $\lambda=\frac{11}{2}$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $x+y=C$ и эллипса $\frac{x^2}{119}+\frac{y^2}{2}=1$. Получим $119+2=C^2$, $C=\pm 11$. Значит $\max=11$, $\min=-11$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{119}+\frac{yy_0}{2}=1$ и $\frac{x}{11}+\frac{y}{11}=\pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{119}{11},\frac{2}{11}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{119}{11},-\frac{2}{11}\right)$ — точка минимума.

7. $\boxed{6}$ $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\cdot\sin\pi nx$, сходится неравномерно к 2-периодическому продолжению функции $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & x=\pm 1.\end{cases}$ При $x=\frac{1}{2}$ имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}=\frac{1}{2}$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2n^2}=\frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha>\frac{1}{2}$,

сходится условно при $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$,

расходится при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{4}$.

9. $\boxed{2}$ $(A|b)=\left(\begin{array}{rrrrr|r}1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 4 & -5 & 7\end{array}\right)$; $F=\left(\begin{array}{r|r|r}-2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0=\begin{pmatrix}2\\0\\7\\0\\0\end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\7\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}1\\0\\5\\0\\1\end{pmatrix}t_3.$

10. $\boxed{3}$ $12x-11y+13z-3=0$. В уравнение пучка $\lambda(2x-y+z-1)+\mu(3x+y-2z-3)=0$, $\lambda^2+\mu^2\neq 0$, подставим координаты точки M, получим $2\lambda+9\mu=0$. Возьмём $\lambda=9$, $\mu=-2$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_1'}{\sqrt{18}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{11}}, \\ x_3 = \frac{x_3'+x_1'}{\sqrt{18}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $\quad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$.
$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{\sqrt{42}}{28}$. Приме́ним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1|\cdot|\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (2,1,-1)^T$ и $\eta = (1,-3,-1)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = \frac{4}{3}$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T\Gamma^{-1}\eta = \frac{7}{2}$, $(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = \frac{-1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{42}}{28}$.

---

13. $\boxed{4}$ $e^{iz}=w$, $w^2-2w+2=0$, $w=1\pm i$,
$z = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\sqrt{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{z}{\operatorname{ch}\frac{1}{z}+\operatorname{ch}\frac{3}{z}} = \frac{z}{2} - \frac{5}{4z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z\to\infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{5}{4}$, $I = -2\pi i\cdot\frac{5}{4} = -\frac{5\pi i}{2}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^2 - y^3, \quad y=0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \frac{1}{17}e^{-4x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-7t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + 2xy' - 12y = -10x$ — уравнение Эйлера;
$y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^4} + x$ — экстремали;
$\hat{y} = x - 2x^3$ — допустимая экстремаль.

Вариант 9

1. $\boxed{3}$ e^{-23}.

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x\neq 0$.

б) $f(x)=\frac{x^{20}}{9}+o(x^{20})+x^{19}(12xg(x))=o(x^{19})+o(x^{19})+o(x^{19})=o(x^{19})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{12(\triangle x)^{20}g(\triangle x)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}12(\triangle x)^{19}g(\triangle x)=0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x)=o(x)$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C^{n-1}_{-2/7}}{2^{7n-5}}+\frac{C^{n}_{-2/7}}{2^{7n+2}}\right)x^{2n}$, $\qquad R_{cx}=8\sqrt{2}$.

4. $\boxed{3}$ Сходится к $f(x)=x^2$ равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$\forall\ t\in\mathbb{R}$ выполняется $|t-\operatorname{arctg} t|\leqslant\frac{|t|^3}{3}$. Тогда при $x\in E_1$ и $n\in\mathbb{N}$ имеем:

$R_n(x)=\left|x^2-\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right|=\sqrt{n}\left|\frac{x^2}{\sqrt{n}}-\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{3}\sqrt{n}\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)^3\leqslant\frac{1}{3n}\to 0$ при $n\to\infty$. Сходимость на E_1 равномерная. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(n^{1/4})=+\infty$, сходимость на E_2 неравномерная.

5. $\boxed{4}$ $I=\pi$.

6. $\boxed{4}$ $\max=30$, $\min=-30$.

$A\left(\frac{24}{5},-\frac{9}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{24}{5},\frac{9}{5}\right)$ — точка минимума.

$d^2L=\lambda\left(\frac{1}{18}dx^2+\frac{2}{9}dy^2\right)$, где $L=4x-6y+\lambda\left(\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda=-15$ в точке максимума, $\lambda=15$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $4x-6y=C$ и эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. Получим $16\cdot 36+36\cdot 9=C^2$, $C=\pm 30$. Значит $\max=30$, $\min=-30$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{36}+\frac{yy_0}{9}=1$ и $\frac{4x}{30}-\frac{6y}{30}=\pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{24}{5},-\frac{9}{5}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{24}{5},\frac{9}{5}\right)$ — точка минимума.

7. $\boxed{6}$ $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$, сходится равномерно к 4-периодическому продолжению функции $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -x-2, & -2\leqslant x\leqslant -1.\end{cases}$ При $x=1$ имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}=1$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. $\qquad\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{64}{\pi^4(2n+1)^4}=\frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha>1$,

сходится условно при $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$,

расходится при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -7 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{c|c|c} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_3$.

---

10. $\boxed{3}$ $7x+11y-8z-7=0$. В уравнение пучка $\lambda(x-2y+z-1)+\mu(2x+y-z-2)=0,\ \lambda^2+\mu^2 \neq 0$, подставим координаты точки M, получим $5\lambda+3\mu=0$. Возьмём $\lambda=-3$, $\mu=5$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_2'}{\sqrt{17}}, \\ x_2 = \frac{x_3'+x_2'}{\sqrt{17}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{12}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho = \sqrt{14}$. Приме́ним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho = \frac{|ax_0'+by_0'+cz_0'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi = (1,-1,1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = \frac{7}{2}$, $\rho = \frac{|x_0-y_0+z_0+8|}{|\vec{n}|} = \sqrt{14}$.

---

13. $\boxed{4}$ $e^{iz} = w$, $w^2 = -3$, $z = \frac{\pi}{2} + \pi k - i\ln\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{z} + \operatorname{sh}\frac{3}{z}} = \frac{z}{4} - \frac{7}{24z} + o\left(\frac{1}{z}\right),\ z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{7}{24}$, $I = -2\pi i \cdot \left(\frac{7}{24}\right) = -\frac{7}{12}\pi i$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{13}y^5, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{11t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-10t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-10t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' + 3xy' - 3y = -3$ — уравнение Эйлера;

$y = C_1x + C_2x^{-3} + 1$ — экстремали;

$\hat{y} = 1 - x$ — допустимая экстремаль.

Вариант 10

---

1. $\boxed{3}$ e^{-5}.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x = 0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = x^{27} + o(x^{27}) + x^{26}(8xg(x)) = o(x^{26}) + o(x^{26}) + o(x^{26}) = o(x^{26})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{8(\triangle x)^{27} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} 8(\triangle x)^{26} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-1/6}^{n-2}}{2^{6n-11}} + \frac{C_{-1/6}^{n-1}}{2^{6n-5}} \right) x^{2n}, \qquad R_{cx} = 8.$

---

4. $\boxed{3}$ Ряд сходится равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$f_n(x) = \frac{x \ln(xn)}{n^2}$, $f_n'(x) = \frac{\ln(xn)+1}{n^2} = 0$ при $x_n = \frac{1}{ne}$.

$|f_n(x_n)| = \frac{1}{en^3}$, $|f_n(1)| = \frac{\ln n}{n^2}$, $|f_n(+0)| = 0$. $\forall\ x \in E_1\ \forall\ n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{en^3} + \frac{\ln n}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{en^3} + \frac{\ln n}{n^2}\right)$ сходится по интегральному признаку. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_1. $|f_n(x)| \leqslant \frac{x|\ln x|}{n^2} + \frac{x \ln n}{n^2}$. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на E_2. $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(n^2)| = +\infty$. Значит $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ на E_2 и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на E_2 неравномерная.

---

5. $\boxed{4}$ $I = -4\pi$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 44$, $\min = -44$.

$A\left(\frac{11}{2}, 3\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{11}{2}, -3\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda\left(\frac{2}{121}dx^2 + \frac{1}{6}dy^2\right)$, где $L = 2x + 11y + \lambda\left(\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{12} - 1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -22$ в точке максимума, $\lambda = 22$ в точке минимума.

II способ. Возможно геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $2x+11y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{12} = 1$. Получим $4 \cdot 121 + 121 \cdot 12 = C^2$, $C = \pm 44$. Значит $\max = 44$, $\min = -44$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{121} + \frac{yy_0}{12} = 1$ и $\frac{2x}{44} + \frac{11y}{44} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{11}{2}, 3\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{11}{2}, -3\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} \cdot \cos \pi(2n+1)x$, сходится равномерно к 2-периодическому продолжению функции $f(x) = 1 - |x|$, $|x| \leqslant 1$. При $x = 0$ имеем: $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} = 1$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\quad \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > 1$,

сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{r|r|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t_3$.

---

10. $\boxed{3}$ $x + 2y - 2z - 3 = 0$. Плоскость $\lambda(x + y - z - 2) + \mu(2x - y + z - 1) = 0$ параллельна вектору $\vec{e}(-2, 2, 1) \Leftrightarrow -2(\lambda + 2\mu) + 2(\lambda - \mu) + (-\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 5\mu = 0$. Возьмём $\lambda = \frac{5}{3}$, $\mu = -\frac{1}{3}$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_1'}{\sqrt{28}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{17}}, \\ x_3 = \frac{x_3' + x_1'}{\sqrt{28}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{28}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{28}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{28}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{28}} \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Приме́ним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1| \cdot |\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (1, -1, 1)^T$ и $\eta = (2, -1, -2)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T \Gamma^{-1} \xi = \frac{7}{2}$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T \Gamma^{-1} \eta = \frac{9}{2}$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \xi^T \Gamma^{-1} \eta = -\frac{3}{2}$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

---

13. $\boxed{4}$ $e^{iz} = w$, $w^2 - 6iw - 5 = 0$, $w_1 = i$, $w_2 = 5i$; $z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{z}{\operatorname{ch}\frac{1}{z} + \operatorname{ch}\frac{2}{z}} = \frac{z}{2} - \frac{5}{8z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{5}{8}$, $I = -2\pi i \cdot \frac{5}{8} = -\frac{5\pi i}{4}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^3 - y^4, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{3} e^{2x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{18t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ — уравнение Эйлера;

$y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$ — экстремали;

$\hat{y} = \frac{1}{4} x^2$ — допустимая экстремаль.

Вариант 11

---

1. $\boxed{3}$ e^2.

---

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x = 0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x) = \frac{x^{14}}{5} + o(x^{14}) + x^{13}(9xg(x)) = o(x^{13}) + o(x^{13}) + o(x^{13}) = o(x^{13})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{9(\triangle x)^{14} g(\triangle x)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} 9(\triangle x)^{13} g(\triangle x) = 0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x) = o(x)$.

---

3. $\boxed{3}$ $f(x) = \frac{x^3}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{C_{-1/4}^{n-2}}{2^{4n-7}} + \frac{C_{-1/4}^{n-1}}{2^{4n-3}} \right) x^{3n}, \qquad R_{cx} = 2\sqrt[3]{2}.$

---

4. $\boxed{3}$ Сходится к $f(x) = x^3$ равномерно на E_1, неравномерно на E_2.

$R_n(x) = n^2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{n^2} - x^3 > 0$, $R_n'(x) = 3x^2 \left(\operatorname{ch} \frac{x^3}{n^2} - 1 \right) > 0$, Для всех $x \in E_1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется $|R_n(x)| \leqslant R_n(1) = n^2 \operatorname{sh} \frac{1}{n^2} - 1 \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость на E_1 равномерная. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} |R_n(n^{2/3})| = +\infty$, сходимость на E_2 неравномерная.

---

5. $\boxed{4}$ $I = \frac{4\pi R^5}{15}$.

---

6. $\boxed{4}$ $\max = 33$, $\min = -33$.

$A\left(\frac{30}{11}, -\frac{21}{11}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{30}{11}, \frac{21}{11}\right)$ — точка минимума.

$d^2L = \lambda \left(\frac{2}{9} dx^2 + \frac{2}{21} dy^2 \right)$, где $L = 10x - 3y + \lambda \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{21} - 1 \right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda = -\frac{33}{2}$ в точке максимума, $\lambda = \frac{33}{2}$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $10x - 3y = C$ и эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{21} = 1$. Получим $100 \cdot 9 + 9 \cdot 21 = C^2$, $C = \pm 33$. Значит $\max = 33$, $\min = -33$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{21} = 1$ и $\frac{10x}{33} - \frac{3y}{33} = \pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{30}{11}, -\frac{21}{11}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{30}{11}, \frac{21}{11}\right)$ — точка минимума.

---

7. $\boxed{6}$ $y(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \cos 2(2n+1)x$, сходится равномерно к π-периодическому продолжению функции $f(x) = |x|$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. При $x = 0$ имеем: $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. $\qquad \frac{\pi^2}{8} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

---

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$,

сходится условно при $\frac{1}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$,

расходится при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$.

---

9. $\boxed{2}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & -5 & 1 & 5 \end{array}\right)$; $F = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 5 \end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t_3$.

---

10. $\boxed{3}$ $7x + y - 3z - 7 = 0$. Плоскость $\lambda(x + y - z - 1) + \mu(x - 2y + z - 1) = 0$ параллельна вектору $\vec{e}(1, -1, 2) \Leftrightarrow (\lambda + \mu) - (\lambda - 2\mu) + 2(-\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + 5\mu = 0$. Возьмём $\lambda = 5$, $\mu = 2$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3' - x_2'}{\sqrt{8}}, \\ x_2 = \frac{x_3' + x_2'}{\sqrt{8}}, \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{13}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$, $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\rho = \sqrt{3}$. Приме́ним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнение плоскости и координаты точки M. Так как новая система координат прямоугольная, по формуле $\rho = \frac{|ax_0' + by_0' + cz_0' + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ найдём расстояние.

II способ. $\xi = (2, 1, -1)^T$ — координаты нормального вектора плоскости $\vec{n}$ во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда находим $|\vec{n}|^2 = \xi^T \Gamma^{-1} \xi = \frac{4}{3}$,

$\rho = \frac{|2x_0 + y_0 - z_0 - 1|}{|\vec{n}|} = \sqrt{3}$.

---

13. $\boxed{4}$ $e^{iz} = w$, $8w^2 = -4$, $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + i \ln \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{z}{\operatorname{ch} \frac{3}{z} + \operatorname{ch} \frac{2}{z}} = \frac{z}{2} - \frac{13}{8z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \to \infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{13}{8}$, $I = -2\pi i \cdot \frac{13}{8} = -\frac{13\pi i}{4}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^5 + y^5 \ln |y|, \quad y = 0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} e^x$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{24t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-9t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-9t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2 y'' + 3xy' - 3y = -3$ — уравнение Эйлера;

$y = C_1 x + C_2 x^{-3} + 1$ — экстремали;

$\hat{y} = 3x + 1$ — допустимая экстремаль.

Вариант 12

1. $\boxed{3}$ e^{-1}.

2. $\boxed{4}$ а) Непрерывна при $x=0$, разрывна при $x \neq 0$.

б) $f(x)=\frac{x^{18}}{7}+o(x^{18})+x^{17}(7xg(x))=o(x^{17})+o(x^{17})+o(x^{17})=o(x^{17})$. Верно.

в) 1 раз дифференцируема. $f'(0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{7(\triangle x)^{18}g(\triangle x)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}7(\triangle x)^{17}g(\triangle x)=0$. $f''(0)$ не существует, так как $f'(x)$ не определена в окрестности нуля.

г) $f(x)=o(x)$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C^{n-1}_{-2/5}}{2^{5n-3}}+\frac{C^{n}_{-2/5}}{2^{5n+2}}\right)x^{3n}, \qquad R_{cx}=2\sqrt[3]{4}.$

4. $\boxed{3}$ На E_1 ряд сходится неравномерно, на E_2 ряд сходится равномерно.

5. $\boxed{4}$ $I=\frac{8\pi R^5}{5}$.

6. $\boxed{4}$ $\max=20$, $\min=-20$.

$A\left(\frac{15}{4},-\frac{7}{4}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{15}{4},\frac{7}{4}\right)$ — точка минимума.

$d^2L=\lambda\left(\frac{2}{25}dx^2+\frac{2}{7}dy^2\right)$, где $L=3x-5y+\lambda\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}-1\right)$ — функция Лагранжа.

$\lambda=-10$ в точке максимума, $\lambda=10$ в точке минимума.

II способ. Геометрическое решение. Напишем условие касания прямой $3x-5y=C$ и эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$. Получим $9\cdot 25+25\cdot 7=C^2$, $C=\pm 20$. Значит $\max=20$, $\min=-20$. Уравнения касательных $\frac{xx_0}{25}+\frac{yy_0}{7}=1$ и $\frac{3x}{20}-\frac{5y}{20}=\pm 1$ пропорциональны, откуда находим $A\left(\frac{15}{4},-\frac{7}{4}\right)$ — точка максимума, $B\left(-\frac{15}{4},\frac{7}{4}\right)$ — точка минимума.

7. $\boxed{6}$ $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\cdot\sin(2n+1)x$, сходится равномерно к 2π-периодическому продолжению функции $f(x)=\begin{cases}x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\\ -x-\pi, & -\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ При $x=\frac{\pi}{2}$ имеем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}$, откуда находим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. $\quad\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{6}$ — равенство Парсеваля, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

8. $\boxed{7}$ Сходится абсолютно при $\alpha>\frac{1}{3}$, сходится условно при $\frac{1}{6}<\alpha\leqslant\frac{1}{3}$, расходится при $0<\alpha\leqslant\frac{1}{6}$.

9. $\boxed{2}$ $(A|b)=\left(\begin{array}{rrrrr|r}2&1&4&0&3&2\\7&0&-2&1&-3&5\end{array}\right)$; $F=\left(\begin{array}{r|r|r}1&0&0\\-2&-4&-3\\0&1&0\\-7&2&3\\0&0&1\end{array}\right)$. Столбцы F есть ФСР. Частное решение $f_0=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\5\\0\end{pmatrix}$. Решение системы: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-7\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\2\\0\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\3\\1\end{pmatrix}t_3.$

10. $\boxed{3}$ $6x+7y+12z-11=0$. В уравнение пучка $\lambda(x+y+z-1)+\mu(3x+2y-3z+2)=0$, $\lambda^2+\mu^2\neq 0$, подставим координаты точки M, получим $\lambda+9\mu=0$. Возьмём $\lambda=9$, $\mu=-1$.

---

11. $\boxed{3}$ Положим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3'-x_1'}{\sqrt{11}}, \\ x_2 = \frac{x_2'}{\sqrt{17}}, \\ x_3 = \frac{x_3'+x_1'}{\sqrt{11}}. \end{cases}$ Тогда $k = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$. $\quad S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$.
$\operatorname{rg} k = 3$, $\sigma = 1$.

---

12. $\boxed{6}$ $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Примéним процесс ортогонализации к столбцам единичной матрицы с последующей нормировкой. Располагая матрицей перехода к найденному ортонормированному базису, напишем в новой системе координат уравнения плоскостей. Новая система координат прямоугольная. По формуле $\cos\varphi = \frac{|(\vec{\nu}_1,\vec{\nu}_2)|}{|\vec{\nu}_1|\cdot|\vec{\nu}_2|}$ найдём косинус острого угла между плоскостями.

II способ. $\xi = (3,-1,1)^T$ и $\eta = (2,-1,3)^T$ — координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ заданных плоскостей во взаимном базисе, имеющем матрицу Грама $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}$.
Находим: $|\vec{n}_1|^2 = \xi^T\Gamma^{-1}\xi = 5$, $|\vec{n}_2|^2 = \eta^T\Gamma^{-1}\eta = 9$, $(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = \xi^T\Gamma^{-1}\eta = 6$, $\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

---

13. $\boxed{4}$ $4\operatorname{tg}^2 z - 3i\operatorname{tg} z + 1 = 0$, $\operatorname{tg} z = i$, $\operatorname{tg} z = -\frac{i}{4}$, $\operatorname{tg} z = \frac{w-1}{i(w+1)}$, где $w = e^{2zi}$; $w = \frac{5}{3}$,
$z = \pi k - i\ln\sqrt{\frac{5}{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

---

14. $\boxed{4}$ $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}+\sin\frac{2}{z}} = \frac{z}{3} + \frac{1}{6z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$, $z\to\infty$. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{6}$, $I = -2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi i}{3}$.

---

15. $\boxed{3}$ $x = Cy^7 + y^7\ln|y|$, $\quad y=0$.

---

16. $\boxed{3}$ $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{15}e^{4x}$.

---

17. $\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-4t} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t}$.

---

18. $\boxed{4}$ $x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3$ — уравнение Эйлера;
$y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} + x^3\ln x$ — экстремали;
$\hat{y} = x^3\ln x$ — допустимая экстремаль.
