

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln^2(1+x) + \arcsin(2x-x^2)}{\sin x + \operatorname{tg} x} \right)^{\frac{x}{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{arctg} x}}$.

3.③ Найти координаты точки M' , симметричной точке $M(2, -3, 6)$ относительно плоскости $\pi : x - 2y + 3z + 2 = 0$. Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = -\frac{x^3}{(x+1)^2} - 2.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{2x} \ln(2+t^2) dt$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^n} \right) dx$. Ответ обосновать.

9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^3 < 4x^2y^2, x > 0, y > 0\}$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 4(y^2 - x^2) + 3$ при условии $4x^4 - 16y^4 = 3$.

11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} 3x^2y^2 dx + (2yx^3 + x^2) dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2y, x > 0\}$ (обход границы против часовой стрелки).

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \pi, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 3\pi - 2x, & \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = -x + 5y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{1/2} \text{ch}[e^{2x}(y' + 2y - 4x)] dx, \quad y(0) = -1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' - xy = x^2 - 2, x > 0$, если известны два его решения $y_1 = -x, y_2 = \frac{e^x}{x} - x$.

17.③ В выражении $w = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ перейти от декартовых координат x, y к полярным, полагая $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \operatorname{sh} x}{e^{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{1 + 2x} - \operatorname{tg}^2 x}$.

3.③ Найти расстояние от точки $A(1, -1, 3)$ до прямой $\ell : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - 2z + 6 = 0. \end{cases}$ Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $x_1^2 + \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = x - 1 + \frac{27}{x^3}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x + 3}{2x - 3}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ln 2} \left(e^x \cos \frac{\sqrt{x}}{n} \right) dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^{\pi^2} dx \int_{\sqrt{x}}^{\pi} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 8xy + 3$ при условии $x^2 + 4xy + 4y^2 = 1$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\int_S x dydz + (2y^2 + z^2) dzdx$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2/9 < 1\}$.

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по синусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+i|=2} z^5 \left(\operatorname{sh} \frac{1}{z^2} - 1 \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - \frac{1}{2}y, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - 4y^2 + 2yy' + (4x - 4)y] e^{-2x} dx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $xy'' - y' + 4x^3y = 4x^3$, $x > 0$, если известны два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = 1 + \cos(x^2)$.

17.③ Пусть $f(x, y, u, v) = 2xu + y^2v^2$. Найти $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, -1, 2)$, если функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 - v = 1, \\ 2x^3 + y^2 + u + v^2 = 6. \end{cases}$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x - \arcsin^2 x}{\sin 2x - \operatorname{sh} x} \right)^{\frac{x}{\ln^2(1+x)-x^2}}$.

3.③ Составить канонические уравнения биссектрисы, проведенной из вершины A треугольника ABC , где $A(1, 0, 1)$, $B(3, -2, 0)$ и $C(2, 4, 9)$. Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0, \\ 6x_1 + 10x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{2x^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{x/2} \frac{\operatorname{arctg}(3t)}{t} dt$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить интеграл $\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} \right) dx$. Ответ обосновать.

9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2 + y)^2 < 4(x^2 + y^2), x > 0\}$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = \frac{1}{2}(x + y) - 3$ при условии $3x^2 - 8xy + 3y^2 + 8 = 0$.

11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} 2x \sin y dx + x^2(1 + \cos y) dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : x < 1 - y^2, x > 0\}$ (обход границы против часовой стрелки).

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z - \frac{\pi}{2}|=2} \left(\frac{1}{z \cos z} + 1 \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^2 e^{e^{-x} \cdot (y' - y + 1)} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 1.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 4x^2 + 2$, если известны два его решения $y_1 = 1, y_2 = 1 + e^{-x^2}$.

17.③ В уравнении $2y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + y = 0$ перейти к новым координатам u и v , если $x = u + v^2, y = v$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{\cos x - \sqrt{1+2x} + x}$.

3.③ Точка A лежит на прямой $\ell : \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$ и удалена от плоскости $\pi : x - y + 1 = 0$ на расстоянии $\sqrt{2}$. Найти координаты точки A . Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $2x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\alpha x_2x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = 2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e n \sin \frac{1}{nx} dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 y\sqrt{1+y^4}dy$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = x^2 - y^2 + 1$ при условии $x^3 - 2y^3 = 6$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\int_S 3x^2 dydz + (z+y^2) dx dy$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < 1\}$.

12.④ Разложить функцию $f(x) = \pi - 2x$ в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по синусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+1|=2} z^3 (e^{i/z^2} + \cos^2 z) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 + y^2 + 10xyy' - 8y \sin 2x] dx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $(\cos^2 x)y'' - (1 + \sin^2 x)y = 1 + \sin^2 x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, если известны два его решения $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{\cos x} - 1$.

17.③ Найти $y'(1)$ и $z''(1)$, если функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^4 = 1, \\ y^2 - 2x + z^2 = 0, \end{cases} \quad y(1) = z(1) = 1.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2(x^2)}$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - \operatorname{tg} x}{xe^{-2x} + 2 \operatorname{sh}^2 x} \right)^{\frac{2}{\sin^2 2x}}$.

3.③ Найти угол между прямой $\ell : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{4}$ и плоскостью π , проходящей через точки $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ и $C(2, 0, -1)$. Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \frac{(x-2)^3}{2(x-3)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{x/3} t \sqrt{1-3t^3} dt$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n x}$. Ответ обосновать.

9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 < 2xy, x > 0, y > 0\}$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = xy$ при условии $x^2 - xy + y^2 = 1$.

11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (y^4 - 2xy) dx + 4xy^3 dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2y, x < 0, y < 1\}$ (обход границы против часовой стрелки).

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=2} \left(\frac{1}{z \sin z} - 1 \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 [e^{-2x} \operatorname{ch}(y' - 2y - e^{2x})] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^2.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $4xy'' + 2y' + y = x, x > 0$, если известны два его решения $y_1 = x - 2, y_2 = \sin \sqrt{x} + x - 2$.

17.③ В выражении $w = y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$ перейти от декартовых координат x, y к полярным, полагая $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{x \ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2} \sin \ln(1 + 2x) - \sqrt[3]{1 + 3x} + 1}$.

3.③ Найти расстояние между прямыми $\ell_1 : x = 2 + t, y = 1 + t, z = 4t$ и $\ell_2 : x - 2y - 1 = 0, z - 6y - 2 = 0$. Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $\alpha x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^4.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3-x^2}{3+x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \cos \frac{x}{nx+1} dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 2x + y$ при условии $2x + y + xy = 30$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S xy dz dx + 3y dx dy$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по синусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} (z-i) \left(\operatorname{ch} \frac{1}{z-i} + 1 \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2 + 2yy' + (4x+4)y] e^{2x} dx, \quad y(0) = 0.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $(\cos^2 x)y'' - 2y = 2x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, если известны два его решения $y_1 = -x$, $y_2 = \operatorname{tg} x - x$.

17.③ Пусть $f(x, y, u, v) = yu + xv^2$. Найти $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 1, -1)$, если функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x(u^2 + v^2) - 2uy = 2, \\ xu - y(u^2 + v^2) + v^2 = 2. \end{cases}$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - \ln(1-x) - 1}{e^{-x^2} \cdot \operatorname{tg} 2x} \right)^{\frac{4}{\arctg^2 x}}$.

3.③ Найти координаты точки M' , симметричной точке $M(3, 1, 0)$ относительно плоскости $\pi: 2x + y - z - 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = -\frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{x/2} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{x^2 + 2^n}$. Ответ обосновать.

9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2 - x)^2 < x^2 + y^2, y > 0\}$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = x + y - 1$ при условии $x^3 - x^2y^2 + y^3 = 0$.

11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (y^3 \sin x + 2y^2) dx - 3y^2 \cos x dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : y < x(1-x), y > 0\}$ (обход границы против часовой стрелки).

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ x - \frac{3\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z+1|=2} \left(\frac{1}{(e^z - 1)^2} + z \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -3x - 4y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 + 2yy' + 12e^{2x}y]e^{-x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2e^2.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 1, x > 0$, если известны два его решения $y_1 = -1, y_2 = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

17.③ В уравнении $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$ перейти к новым координатам u и v , если $x = u, y = uv$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 \sqrt{x}}$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \sin x) - xe^{-x} - x}{e^x \cos x - e^{\arcsin x}}$.

3.③ Найти расстояние между прямыми $\ell_1 : \frac{x-1}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$ и $\ell_2 : \begin{cases} x-4y+8=0, \\ x-3y+z=-5. \end{cases}$
Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = 3 - x - \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin \frac{6x}{9+x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e \frac{\ln(x + \frac{1}{n})}{x} dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 3 - 2x^2 + y^2$ при условии $2x^3 - y^3 = 1$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (y-1)^2 dz dx + 2z dx dy$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 2y, z > 0\}$.

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=\pi} (z+1) \sin^2 \frac{1}{z+1} dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ \dot{y} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 + 4xyy' - 4y \sin x] dx, \quad y(0) = 0.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $(\sin^2 x)y'' - 2y + x = 0$, $x \in (0, \pi)$, если известны два его решения $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_2 = \operatorname{ctg} x + \frac{x}{2}$.

17.③ Найти $y''(1)$ и $z'(1)$, если функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3y + z^3 = 6, \\ 3x^2 + y^2 + 2z = 5, \end{cases} \quad y(1) = 2, \quad z(1) = -1.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x + 2 \ln(1+x)}{\operatorname{sh} 2x \cdot \cos x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3.③ Найти угол между прямой $\ell : \begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью Oxy . Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \frac{x^2(x+2)}{(x-1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{2x} \operatorname{arctg}(t^2/2) dt$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} \cos \pi n x$. Ответ обосновать.

9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 < 2(x^2 - y^2), x > 0\}$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 9 - 3(x + y)$ при условии $5x^2 - 18xy + 5y^2 + 18 = 0$.

11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (2xy^3 - y^4) dx + 3x^2y^2 dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < x, y > 0\}$ (обход границы против часовой стрелки).

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по синусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{tg} \pi z}{z} - \pi z \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 [e^x \operatorname{ch}(y' + y - x^2 - 2x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $4xy'' + 2y' - y = x - 2, x > 0$, если известны два его решения $y_1 = -x, y_2 = e^{\sqrt{x}} - x$.

17.③ В выражении $w = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$ перейти от декартовых координат x, y к полярным, полагая $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \operatorname{sh} x}{\cos \ln(1+x) - e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x}}$.

3.③ Точка A лежит на прямой $\ell: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ и удалена от плоскости $\pi: x + 2y - z + 2 = 0$ на расстоянии $\sqrt{6}$. Найти координаты точки A . Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 6x_1 x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arccos} \frac{4x}{1+4x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{nx^2} dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{e^y - 1}{\sqrt{y}} dy$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y < 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 8xy - 1$ при условии $4x^2 - 4xy + y^2 = 1$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S y^2 dydz + xz dx dy$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} < x < 1\}$.

12.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \pi, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-i|=2} z^3 \cos^2 \frac{1}{2z^2} dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 6y, \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x - 2y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 e^x + 3x^2 y^2 + 2x^3 y y' - 2y] dx, \quad y(1) = 2e^{-1}.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $(\sin^2 x)y'' - (1 + \cos^2 x)y = 1 + \cos^2 x$, $x \in (0, \pi)$, если известны два его решения $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{\sin x} - 1$.

17.③ Пусть $f(x, y, u, v) = uvxy$. Найти $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2, 1, -2)$, если функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u^3 - 4x^3 + 3vy = -7, \\ 2x^2 + uy^2 + v^2 = 10. \end{cases}$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x + \operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$.

3.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 2)$, $B(1, 1, 3)$ и перпендикулярной плоскости $\pi : x + 2y - 3z - 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

4.③ Найти все значения параметра α , при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. При этих значениях α решить систему.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ самосопряженным.

6.④ Найти асимптоты, абциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \int_0^{2x} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.④ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \sin \pi n x$. Ответ обосновать.
-
- 9.③ Найти площадь области $G = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^3 < (x^2 - y^2)^2, y > |x|\}$.
-
- 10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 3x^2 - 2y^2$ при условии $3x^3 - 2y^3 = 1$.
-
- 11.④ Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (e^x y^2 - y) dx + 2ye^x dy$, где Γ — граница области $D = \{(x, y) : y > 0, y < 1 - x^2\}$ (обход границы против часовой стрелки).
-
- 12.④ Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.
-
- 13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z-2|=2} \left(\frac{\sin z}{(z^2 - \pi^2)^2} + e^z \right) dz$.
-
- 14.③ Найти общее решение системы
- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$
- Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.
-
- 15.④ Найти допустимую экстремаль функционала
- $$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + 3y^2 - 2yy' - 6e^{-x}y]e^{-x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$$
-
- 16.③ Найти общее решение уравнения $xy'' + 2y' + xy = x$, $x > 0$, если известны два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{\sin x}{x} + 1$.
-
- 17.③ В уравнении $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2$ перейти к новым координатам u и v , если $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$, ($u > 0, v > 0$).
-

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.② Вычислить интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} dx$.

2.③ Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \arcsin x + \ln \cos x + e^{-x} - 1}{\operatorname{arctg} x - \sin x}$.

3.③ Найти расстояние между прямыми $\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ и $\ell_2 : x = 5 + 2t, y = t, z = 1 + 2t$. Система координат прямоугольная.

4.③ Выписать матрицу квадратичной формы $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\alpha x_1x_3$. Найти все значения параметра α , при которых данная форма положительно определена.

5.⑤ Пусть линейное преобразование φ имеет в базисе e_1, e_2 матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица Грама этого базиса.

1) Найти собственные значения и базис из собственных векторов преобразования φ .

2) Выяснить, являются ли собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональными.

3) Выяснить, является ли преобразование φ ортогональным.

6.④ Найти асимптоты, абсциссы точек экстремума и перегиба, промежутки монотонности, выпуклости вверх и вниз, построить график функции

$$y = x - 1 + \frac{4}{(x-1)^2}.$$

7.③ Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{2+x}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.④ Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x \sqrt{1 + \sin \frac{x^2}{n}} dx$. Ответ обосновать.

9.③ Вычислить $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx$.

10.⑤ С помощью метода множителей Лагранжа в области $x > 0, y > 0$ исследовать на экстремум функцию $u = 3 - x - y$ при условии $4x^2 - 9xy + 4y^2 + 9 = 0$.

11.④ Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (3x+z^2) dydz + 2y^2 dzdx$, где S — внешняя сторона границы области $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 2x, 0 < z < 1\}$.

12.④ Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$. Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

13.② Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} (z-1)^2 \left(e^{\frac{1}{z-1}} + z \right) dz$.

14.③ Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Определить тип положения равновесия $(0, 0)$. Нарисовать фазовые траектории системы.

15.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2 + 2xyy' - 4y' \sin x] dx, \quad y(0) = 0.$$

16.③ Найти общее решение уравнения $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 4x^3 - 6x$, если известны два его решения $y_1 = x, y_2 = x + e^{x^2}$.

17.③ Найти $y'(2)$ и $z''(2)$, если функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 4, \\ z^3 + 3xy = -5, \end{cases} \quad y(2) = -1, \quad z(2) = 1.$$
