

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 1

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + \frac{n}{3}} \cdot \sin \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \sin(x^{11}) + x^{11} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.

б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{10})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.

в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.

г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt[4]{16+x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{3+n^3 x}\right)$.

5. [4] Вычислить интеграл

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + z^3) dx dy,$$

где Σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 2x - y$ при условии $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < 1$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\cos \pi n x\}_{n=0}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin 2x}{x^\alpha}\right) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6, \\ -3x_1 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 8. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + 3y - 3z = -2 \end{cases}$ и точку $M(1, -1, 2)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 2x_3^2 - 7x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти расстояние от точки $M(1, -1, -2)$ до плоскости $4x + y - z + 5 = 0$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\sin z + 3i \cos z = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\operatorname{sh} \frac{3}{z} + \operatorname{sh} \frac{2}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{x-2y^3}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = e^{-x} + e^{6x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала
 $J(y) = \int_1^2 (x^2(y')^2 - 14xyy' - y^2 - 8xy) dx, \quad y(1) = 2, y(2) = 6.$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 2

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[8]{n^6 + n^8} \cdot \arcsin \frac{1}{n} \right)^{-3n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \ln(1 + x^{12}) + x^{12} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{11})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = \sqrt{n} \operatorname{sh} \frac{x^2}{\sqrt{n}}$.

5. [4] Вычислить интеграл

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS,$$

где Σ — часть поверхности гиперболического параболоида $\{z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 2x + 3y$ при условии $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{8} = 1$.

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\sin(2n+1)x\}_{n=0}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\cos 2x}{x^{4\alpha}}\right) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_5 = -7. \end{cases}$ Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $x - 1 = \frac{y-1}{2} = 1 - z$ и проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 1, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$ Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 7x_2^2 - 8x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $4x + y - z = 5$ и $x + y - z = 8$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $2i \sin z + \cos z = -1$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{z dz}{\operatorname{ch} \frac{1}{z} + \operatorname{ch} \frac{4}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{2x - y^4}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = 5e^{-x} - 2e^{2x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y + 5z, \\ \dot{y} = 5x + y + 5z, \\ \dot{z} = 5x + 5y + z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 11, \lambda_2 = -4).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала
 $J(y) = \int_1^2 (x(y')^2 - 8x^2y' + 16xy - \frac{4}{x}y^2) dx, \quad y(1) = 2, y(2) = 8.$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 3

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{n^3 + n^5} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right)^{3n^2}$.
-
2. [4] а) Функцию $f(x) = \operatorname{th}(x^{17}) + x^{17} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{16})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-
3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(27+x^2)^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-
4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{xn \ln^2 n} \right)$.
-
5. [4] Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$. Обход контура против часовой стрелки, если смотреть из точки $M(0, 0, 1)$. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормированный правый.
-
6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = x + 3y$ при условии $\frac{x^2}{72} + y^2 = 1$.
-

7. [6] Функцию $y(x) = 1 - |1 - x|$, $0 < x < 2$, разложить в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\cos x}{x^{2\alpha}} \right) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_5 = 7, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 8. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1, \\ 2x + 3y - z = -2 \end{cases}$ и точку $M(1, -1, 2)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 3x_2^2 - 8x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти расстояние от точки $M(1, -2, -1)$ до плоскости $x + 2y - z - 11 = 0$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $3i \sin z + \cos z = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\operatorname{sh} \frac{1}{z} + \operatorname{sh} \frac{z}{2}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{3x + 4y^2}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = 5 \cos x - 5e^{2x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3z, \\ \dot{y} = 3x + y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y + z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left(x(y')^2 + \frac{y^2}{x} - 2y' - 6xy \right) dx, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = -4.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 4

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n + n^3} \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)^{-2n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^{17}} - \cos(x^{17}) + 2x^{17} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{16})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^8 + x^4}{\sqrt[5]{(32 + x^4)^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x + \ln^2 n} \operatorname{sh} \frac{8x}{n}$.

5. [4] Вычислить интеграл

$$\iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{1 + 2z}} dS,$$

где Σ — часть поверхности эллиптического параболоида $\{2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = x + 3y$ при условии $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$.

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < 1$, разложить в ряд Фурье по системе $\left\{ \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
-

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \left(\exp \left(\frac{\cos x}{x^{3\alpha}} \right) - 1 \right) dx$.
-

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_4 - 3x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_3 + 8x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$ Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.
-

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $1 - x = \frac{y-1}{2} = z - 1$ и проходящей через прямую $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y - 3z = 2. \end{cases}$ Система координат общая декартова.
-

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 11x_3^2 - 12x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .
-

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $2x - y + z = 7$ и $x + y + 2z = 1$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
-

13. [4] Найти все решения уравнения $\frac{4i}{\sin z} - \operatorname{ctg} z = 7i$, $z \in \mathbb{C}$.
-

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\sin \frac{3}{z} + \sin \frac{2}{z}}$. Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.
-

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{3x - 8y^5}$.
-

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = 2e^{-x} + e^{5x}$.
-

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3).$
-

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала $J(y) = \int_1^2 \left(x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + 4y \right) dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 2 \ln 2$.
-

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 5

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[7]{n^5 + n^7} \cdot \operatorname{th} \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$.
-
2. [4] а) Функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(x^9) + x^9 \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^8)$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-
3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^4 + 1}{\sqrt[5]{(32 + x^4)^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-
4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность: $f_n(x) = n^2 \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n^2}$.
-
5. [4] Вычислить криволинейный интеграл
- $$\oint_C (y + \operatorname{arctg} y) dx + \frac{x}{1 + y^2} dy,$$
- где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки.
-
6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 2x - y$ при условии $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$.
-

7. [6] Функцию $y(x) = \frac{\pi}{2} - |\frac{\pi}{2} - x|$, $0 < x < \pi$, разложить в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом π . Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin 3x}{x^{2\alpha}}\right) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_5 = 1, \\ -2x_1 + 7x_3 + x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$ и точку $M(2, 1, -2)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 3x_3^2 - 11x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти расстояние от точки $M(1, 2, 3)$ до плоскости $2x - y + z + 2 = 0$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\sin z + 2i \cos z = -1$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z} + \sin \frac{3}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{5x+3y^2}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = -4 \sin x + 10e^{3x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 3z, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y + 2z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -1).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x(y')^2 + \frac{y^2}{x} - 2y' - 2\frac{\ln x}{x}y) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 6

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^2 + n^4} \arctg \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$.
-
2. [4] а) Функцию $f(x) = 1 - \cos(x^{11}) + x^{22} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{21})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{\sqrt[5]{(32 + x^2)^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi n}{9 + n^2 x} \right) \right)$.
-

5. [4] Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (y + e^{-y}) dx - x e^{-y} dy,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная по часовой стрелке.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 3x - y$ при условии $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$.
-

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\sin 2nx\}_{n=1}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} (\exp(\frac{\sin 2x}{x^{2\alpha}}) - 1) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ -3x_3 + 7x_4 + x_5 = -5. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $x - 1 = \frac{1-y}{2} = z - 2$ и проходящей через прямую $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ 3x + y - 2z = 3. \end{cases}$ Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 4x_3^2 - 5x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $x + 2y - z = 1$ и $2x - 2y + z = 5$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $4 \operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z = 5i$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\operatorname{sh} \frac{1}{z} + \operatorname{sh} \frac{4}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{x-y^4}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = 3 \sin x + e^{3x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + 4z, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = 4x + 4y + 2z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -2).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала
 $J(y) = \int_5^{10} \left(x(y')^2 + 4xy - \frac{y^2}{x} \right) dx, \quad y(5) = 10, y(10) = 40.$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 7

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[7]{2n^5 + n^7} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right)^{-21n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \ln(1 + x^{10}) + 20x^{10}g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.

б) Верно ли, что $f(x) = o(x^9)$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.

в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.

г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^6 + x^3}{\sqrt[4]{(16 + x^3)^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = \frac{x \ln(xn)}{n^2}$.

5. [4] Вычислить интеграл

$$\iint_{\Sigma} z^3 dS,$$

где Σ — полусфера $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 5x + 4y$ при условии $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{11} = 1$.

7. [6] Функцию $y = 1 - x$, $0 < x < 1$, разложить в ряд Фурье по системе $\left\{ \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
-

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{3\alpha - \cos 2x}} dx$.
-

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_4 - 7x_5 = 9, \\ -2x_1 + x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 2. \end{cases}$ Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.
-

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $1 - x = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{2}$ и проходящей через прямую $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases}$ Система координат общая декартова.
-

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 13x_2^2 - 18x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .
-

12. [6] Найти расстояние от точки $M(-1, 2, 4)$ до плоскости $3x - y + z + 11 = 0$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
-

13. [4] Найти все решения уравнения $\frac{\operatorname{ctg} z}{2i} - \frac{1}{\sin z} = 1$, $z \in \mathbb{C}$.
-

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z} + \sin \frac{4}{z}}$. Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.
-

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{4x - 2y^4}$.
-

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = e^{3x} - e^{-x}$.
-

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 6y + 6z, \\ \dot{y} = 6x - 3y + 6z, \\ \dot{z} = 6x + 6y - 3z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9).$
-

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала $J(y) = \int_1^2 (y^2 + 26xyy' - x^2(y')^2 + 24y) dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = -7$.
-

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 8

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{n^6 - n^4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)^{-6n^2}$.
-
2. [4] а) Функцию $f(x) = \sqrt[5]{1+x^8} - \sqrt[5]{1+x^9} + 3x^8 g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^7)$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-
3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{64+x^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-
4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7x}{8x+n} \operatorname{sh} \frac{2x}{n}$.
-
5. [4] Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j}$ по контуру $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 9, 3y + 4z = 5\}$. Обход контура против часовой стрелки, если смотреть из точки $M(0, 0, 10)$. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормированный правый.
-
6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = x+y$ при условии $\frac{x^2}{119} + \frac{y^2}{2} = 1$.
-

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < 1$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\sin \pi n x\}_{n=1}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} (\exp(\frac{\cos 5x}{x^{2\alpha}}) - 1) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ -2x_2 + x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 7. \end{cases}$ Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ и точку $M(-1, 1, 2)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 11x_2^2 - 18x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $2x + y - z = 1$ и $x - 3y - z = 12$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\frac{2i}{\cos z} - \operatorname{tg} z = 3i$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{z dz}{\operatorname{ch} \frac{1}{z} + \operatorname{ch} \frac{3}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{2x - y^3}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = 2 \cos x + e^{-4x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 5z, \\ \dot{y} = 5x - 2y + 5z, \\ \dot{z} = 5x + 5y - 2z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -7).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^2 (3y^2 + 30xyy' - x^2(y')^2 + 20xy) dx, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = -14.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 9

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{3n^3 + n^5} \arcsin \frac{1}{n} \right)^{-30n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \sqrt[9]{1+x^{20}} - \sqrt[11]{1+x^{21}} + 12x^{20}g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.

б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{19})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.

в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.

г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt[7]{(128+x^2)^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = \sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{n}}$.

5. [4] Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C \cos y \, dx + x(1 - \sin y) \, dy,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 4x - 6y$ при условии $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. [6] Функцию $y(x) = 1 - |1 - x|$, $0 < x < 2$, разложить в ряд Фурье по синусам с периодом 4. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^\alpha - \sin 3x} dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 8, \\ x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 11. \end{cases}$ Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ и точку $M(-1, 2, 1)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 12x_3^2 - 17x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти расстояние от точки $M(2, 4, 1)$ до плоскости $x - y + z + 8 = 0$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\operatorname{tg} z + 3i = 2 \operatorname{ctg} z$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\operatorname{sh} \frac{1}{z} + \operatorname{sh} \frac{3}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{3y}{2x - y^5}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = \sin x + e^{2x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 7y + 7z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + 7z, \\ \dot{z} = 7x + 7y - 3z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 11, \lambda_2 = -10).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^3 (y')^2 - x^2 y y' + 2x y^2 - 6x y) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 10

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. $\boxed{3}$ Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[8]{2n^6 + n^8} \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)^{-12n^2}$.
-
2. $\boxed{4}$ а) Функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(x^{27}) + 8x^{27}g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{26})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-
3. $\boxed{3}$ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{\sqrt[3]{64 + x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-
4. $\boxed{3}$ Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln(xn)}{n^2}$.
-
5. $\boxed{4}$ Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$. Обход контура против часовой стрелки, если смотреть из точки $M(0, 0, 2)$. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормированный правый.
-
6. $\boxed{4}$ Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 2x + 11y$ при условии $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{12} = 1$.
-

7. [6] Функцию $y(x) = |x - 1|$, $0 < x < 2$, разложить в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^\alpha - \cos 4x} dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_5 = 8. \end{cases}$

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $\frac{1-x}{2} = \frac{y-2}{2} = z - 2$ и проходящей через прямую $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$ Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 17x_2^2 - 28x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $x - y + z = 8$ и $2x - y - 2z = 11$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\frac{3}{\cos z} - 3 \operatorname{tg} z = 2i$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{z dz}{\operatorname{ch} \frac{1}{z} + \operatorname{ch} \frac{2}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{3x - y^4}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = e^x + e^{2x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 5y + 5z, \\ \dot{y} = 5x + 8y + 5z, \\ \dot{z} = 5x + 5y + 8z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 3).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_2^4 (\ln x \cdot y^2 + 2x(\ln x + 5)yy' - x^2(y')^2) dx, \quad y(2) = 1, y(4) = 4.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 11

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[9]{n^7 + n^9} \operatorname{th} \frac{1}{n} \right)^{-9n^2}$.

2. [4] а) Функцию $f(x) = \sqrt[5]{1 + x^{14}} - \operatorname{ch}(x^{14}) + 9x^{14}g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{13})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.

3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^6 + x^3}{\sqrt[4]{16 + x^3}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность $f_n(x) = n^2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{n^2}$.

5. [4] Вычислить интеграл

$$\iint_{\Sigma} z^2(x+1) dy dz,$$

где Σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 10x - 3y$ при условии $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{21} = 1$.

7. [6] Функцию $y = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\cos 2nx\}_{n=0}^{\infty}$. Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^{2\alpha} - \sin 3x} dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, параллельной прямой $x - 2 = 1 - y = \frac{z-1}{2}$ и проходящей через прямую $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$ Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 13x_3^2 - 8x_1x_2$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти расстояние от точки $M(1, -1, 2)$ до плоскости $2x + y - z = 1$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $\operatorname{tg} z + 3 \operatorname{ctg} z = 2i$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{z dz}{\operatorname{ch} \frac{3}{z} + \operatorname{ch} \frac{2}{z}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{5x+y^5}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' + y = \cos x + e^x$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 11y + 11z, \\ \dot{y} = 11x + 2y + 11z, \\ \dot{z} = 11x + 11y + 2z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 24, \lambda_2 = -9).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^3 (y')^2 - 4x^2 y y' - x y^2 - 6x y) dx, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 7.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 12

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. [3] Найти предел числовой последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^2 + n^4} \cdot \sin \frac{1}{n} \right)^{-12n^2}$.
-
2. [4] а) Функцию $f(x) = \sqrt[7]{1 + x^{18}} - \operatorname{ch}(x^{18}) + 7x^{18} \cdot g(x)$, где $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ исследовать на непрерывность во всех точках числовой прямой.
б) Верно ли, что $f(x) = o(x^{17})$ при $x \rightarrow 0$? Ответ обосновать.
в) Сколько раз функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$? Ответ обосновать.
г) Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до максимально возможного порядка малости.
-
3. [3] Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt[5]{(32 + x^3)^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.
-
4. [3] Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{th} \left(\frac{\pi n}{7 + n^3 x} \right)$.
-
5. [4] Вычислить интеграл
$$\iint_{\Sigma} (3x^2 y + y^3) dz dx,$$
 где Σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
-
6. [4] Исследовать на относительный экстремум функцию $f = 3x - 5y$ при условии $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{7} = 1$.
-

7. [6] Функцию $y = \frac{\pi}{2} - |\frac{\pi}{2} - x|$, $0 < x < \pi$, разложить в ряд Фурье по синусам с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Сходится ли этот ряд Фурье равномерно на числовой прямой? Ответ обосновать. Найти $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. [7] При всех $\alpha > 0$ исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} (\exp(\frac{\sin 3x}{x^{3\alpha}}) - 1) dx$.

9. [2] Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 7x_1 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5. \end{cases}$
Указать частное решение и фундаментальную систему решений однородной системы.

10. [3] Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 3x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$ и точку $M(-1, -1, 2)$. Система координат общая декартова.

11. [3] Привести квадратичную форму $k = 17x_2^2 - 11x_1x_3$, заданную в трёхмерном линейном пространстве, к каноническому виду. Выписать матрицу перехода от исходного базиса к каноническому. Указать ранг и сигнатуру формы k .

12. [6] Найти косинус острого угла между плоскостями $3x - y + z = 11$ и $2x - y + 3z = 5$, если базис системы координат имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. [4] Найти все решения уравнения $4 \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z = 3i$, $z \in \mathbb{C}$.

14. [4] Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=100} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z} + \sin \frac{z}{2}}$.
Обход контура $\{|z| = 100\}$ против часовой стрелки.

15. [3] Решить уравнение $y' = \frac{y}{7x+y^7}$.

16. [3] Решить уравнение $y'' - y = 3e^x + e^{4x}$.

17. [3] Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 3z, \\ \dot{y} = 3x - y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - z. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -4).$

18. [4] Найти допустимые экстремали функционала
 $J(y) = \int_1^2 \left(\frac{(y')^2}{x} + \frac{3y^2}{x^3} + 8y \right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 8 \ln 2.$
