

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет 3 решения?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \operatorname{sh} x - e^{-x^2}}{\frac{1}{2} \ln(1+2x) - \frac{x}{1+x}}$.

3.② Вычислить $\int \frac{1}{x} \operatorname{arctg}(\ln x) dx$.

4.④ Вычислить $d^2 f(0; 0)$ для $f(x, y) = \exp\left(y^2 + y \ln \frac{1-x}{1+x}\right)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x \sin \frac{1}{n^2 x^5}.$$

6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{2\alpha+2} \sqrt{1+x^3}} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0, 7, 1)$ и прямую $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 3t$, $z = 2 + t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = \frac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} + \operatorname{arctg} x$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

11.④ Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-2}^{-1} (x^2 y'^2 + 12y^2) dx, \quad y(-2) = \frac{1}{16}, \quad y(-1) = 1$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости ограничена прямыми $y = x$, $y = -x$, $x = 2$. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = 2x - 1$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 - 25x - 13}{(x+5)(x-1)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 1)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно 1 решение?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(\operatorname{ch} \sqrt{x} - e^{x/2})}{e^{\arcsin x} - e^{\operatorname{arctg} x}}$.

3.② Вычислить $\int \frac{x^9}{\cos^2(x^5)} dx$.

4.④ Вычислить $d^2 f(0; 1)$ для $f(x, y) = \frac{1}{e^{xy} - 2 \operatorname{tg} x}$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{x^2 + n^4} \operatorname{arctg}(n^3 x).$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3) \cdot \operatorname{sh}^\alpha x}{x^{2-2\alpha}} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = -4 + t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2$ параллельно прямой $x = 2 - 3t$, $y = 10 - t$, $z = 1 + t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = 5y + \sqrt{x}e^{5x}$, $y(0) = 0$.

11.④ Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 2xe^{3x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-2}^{-1} (x^3 y'^2 + 3xy^2 - \frac{6}{x}y) dx, \quad y(-2) = \frac{1}{4}, \quad y(-1) = 1$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из трёх областей, ограниченных линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 4y$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y.$$

15.④ Разложить функцию $y = \frac{x}{\pi} - 1$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{14x^2 - 19x + 17}{(3x + 1)(x + 3)(x - 2)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x-2}{(x-5)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left((1+2x)^{3/4} + (1-2x)^{3/4} - 2 \right)}{e^{\cos x} - e^{\cos x}}$.

3.② Вычислить $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln \sqrt{1+x^2} dx$.

4.④ Вычислить $d^2 f(0; \pi)$ для $f(x, y) = \operatorname{tg} (x^2 - 3x \sin y)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{x}}{n} \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right).$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{(\sqrt{|\ln x|})^\alpha}{\sqrt[3]{1-x^2} \cdot \sin^{\alpha+2} x} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0, 1, 5)$ параллельно прямым $x = 7 - 2t, y = 4 + t, z = 1 - 3t$ и $x = 6, y = 5t, z = -1 + t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -8, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 16x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $xy' = 4y - 2x^6$, $y(-1) = 0$.

11.④ Решить уравнение $y'' - 9y = 6 \operatorname{ch} 3x$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-1/2}^{1/2} \left((x^2 - 1)y'^2 - 4x^3y' - 4y \right) dx, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из двух областей, ограниченных линиями $y = 4$ и $x^2 + y^2 = 25$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 3x^3 + y^3 - x - 3y^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = x + 1$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по системе $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{15x^2 + 52x - 46}{(3x - 2)(x + 4)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x-3}{(x+1)^3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно 2 решения?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + 2xe^x + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - e^{x/3} + \frac{1}{6}x^2}$.

3.② Вычислить $\int e^x \arcsin(e^x) dx$. | 4.④ Вычислить $d^2 f(0; 0)$ для $f(x, y) = \exp\left(x^2 + x \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right)$.

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{5/3} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^3 x^4}\right)$.

6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{5\alpha} \sqrt[3]{1+x^2}} dx$.

7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 4, -3)$ и прямую $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1}$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 10x_2 - 13x_3 = 5. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 12x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = y \operatorname{ctg} x + e^x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

11.④ Решить уравнение $y'' - y' - 2y = -9xe^{-x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left(\frac{3y^2}{x^3} + \frac{y'^2}{x} \right) dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = \frac{17}{2}$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости ограничена прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = -2$. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2y - 2y^3 + x^2 - y^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = \pi - \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 + 10x + 5}{(x+1)(x+2)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{2 - x^2}{(x + 2)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ не имеет решений?

- 2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{arctg} x}}{(\operatorname{sh} \sqrt{x} - \sin \sqrt{x})^2}$.

- 3.② Вычислить $\int \frac{x^7}{\sin^2(x^4)} dx$.

- 4.④ Вычислить $d^2 f(1; 0)$ для $f(x, y) = \ln(e^{xy} + 3 \operatorname{arctg} y)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2 + x^4} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)^\alpha \ln(1 + x)}{(\sqrt{x})^{3\alpha}} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 5}{2} = \frac{z + 1}{-1}$ параллельно прямой $\frac{x + 1}{4} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z}{1}$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

- 9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2$.
- б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.
-
- 10.③ Решить задачу Коши $y' = 4y + \frac{e^{4x}}{\cos^2 x}$, $y(0) = 0$.
-
- 11.④ Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.
-
- 12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала
- $$J(y) = \int_1^4 \left(\frac{2yy'}{x} - \frac{3y^2}{x^2} - y'^2 - \frac{y}{x} \right) dx, \quad y(1) = -\frac{1}{4}, \quad y(4) = -1$$
- и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.
-
- 13.⑤ Область G на плоскости — та из трёх областей, ограниченных линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 4x$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.
-
- 14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию
- $$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$
-
- 15.④ Разложить функцию $y = 1 - x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.
-
- 16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 30}{(2x + 1)(x + 2)(x - 4)}$.
-

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{3-x}{(x-1)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e\sqrt{1+x} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} - 2}$.

3.② Вычислить $\int \cos x \cdot \ln \sin x dx$. 4.④ Вычислить $d^2 f(0; \pi)$ для $f(x, y) = \sin(x^4 - 2x \sin y)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n\sqrt[3]{x}} \cdot \operatorname{th} \frac{1}{x\sqrt[3]{n}}.$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость

$$\int_0^1 \frac{(|\ln x|)^{2\alpha+3}}{\sqrt{1-x^4} \operatorname{sh}^{\alpha+2} x} dx.$$

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2, 2)$ параллельно прямым $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{1}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2, \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 10x_4 = -4, \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 + 20x_4 = 8. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $xy' = 7y + 4x^3$, $y(1) = -1$.

11.④ Решить уравнение $y'' + 9y = \sin 3x$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (\sqrt{4 - x^2} y'^2 - 2y) dx, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = \sqrt{3}$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из четырёх областей, ограниченных линиями $x = 5$, $y = 5$, $x^2 + y^2 = 169$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x + 6y^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = \frac{\pi}{2} - x$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по системе $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{4x^2 + 15x - 38}{(2x - 3)(x + 5)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x+2}{(x-4)^3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет 3 решения?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{\frac{1}{3} \ln(1+3x) - \frac{2x}{2+3x}}$.

3.② Вычислить $\int e^x \operatorname{arctg}(e^x) dx$. | 4.④ Вычислить $d^2 f(0; 0)$ для $f(x, y) = \exp(y^2 - y \arcsin x)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x} \sin \frac{x^5}{n^2}.$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{3\alpha+2} \sqrt{1+x^5}} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2, 1, 4)$ и прямую $x = 1 + 2t$, $y = 7 - t$, $z = 4 + t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_1x_2 + 13x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y'x \ln x = y + x^2 \ln^2 x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$.

11.④ Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = (1+x)e^{2x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-2}^{-1} (x^3 y'^2 + 3xy^2) dx, \quad y(-2) = \frac{15}{8}, \quad y(-1) = 0$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости ограничена прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = 3$. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - x^2y - 2y^3.$$

15.④ Разложить функцию $y = x + 1$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 2}{(2x - 1)(x + 2)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{(x - 1)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно одно решение?

- 2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x) - x \cos \sqrt{x}}{e^{\operatorname{sh} x} - e^{\operatorname{tg} x}}$.

- 3.② Вычислить $\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$.

- 4.④ Вычислить $d^2 f(1; 0)$ для $f(x, y) = \frac{1}{e^{xy} - \sin^2 y}$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^2} \operatorname{arctg} \frac{n^3}{x}.$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha+2} \operatorname{sh}^{\alpha} x} dx.$$

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4, -1, 2)$ перпендикулярно прямой $5x - y + z + 1 = 0$, $3x + 2y - z = 0$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = 2y + \frac{e^{2x}}{x^2}$, $y(1) = 0$.

11.④ Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left(y'^2 + \frac{4yy'}{x} + \frac{4y^2}{x^2} - 8y \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из трёх областей, ограниченных линиями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 6y$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 15x + 12y - x^3 - 3xy^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = \pi - x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$

$$\text{функцию } f(x) = \frac{2x^2 - 28x - 22}{(3x - 1)(x + 3)(x - 5)}.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{1-x}{(x+2)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ не имеет решений?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left((1+2x)^{5/4} + (1-2x)^{5/4} - 2 \right)}{e^{\operatorname{ch} x} - e \operatorname{ch} x}$.

3.② Вычислить $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{1-x^2} dx$.

4.④ Вычислить $d^2 f \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ для $f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2 + x \cos y)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n\sqrt{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{n}} \right).$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt[3]{|\ln x|})^\alpha}{\sqrt{1-x^3} \sin^{\alpha+1} x} dx.$$

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, 1, 1)$ параллельно прямым $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, $z = 5 + 2t$ и $x = -7 + t$, $y = 8$, $z = 3 + 3t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ -2x_1 + 14x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 8, \\ 5x_1 - 35x_2 + 5x_3 + 15x_4 = -20. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

- 9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 25x_2^2$.
- б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.
-
- 10.③ Решить задачу Коши $xy' = 6y + x^5$, $y(1) = 0$.
-
- 11.④ Решить уравнение $y'' - 4y = \operatorname{sh} 2x$.
-
- 12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала
- $$J(y) = \int_0^1 \left((1+x^2)y'^2 + xy \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}$$
- и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.
-
- 13.⑤ Область G на плоскости — та из двух областей, ограниченных линиями $x = 3$ и $x^2 + y^2 = 25$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.
-
- 14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию
- $$f(x, y) = y - 3x^2 - x^3 - 3y^3.$$
-
- 15.④ Разложить функцию $y = x - \pi$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по системе $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.
-
- 16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{12x^2 - 30x - 29}{(3x + 2)(x - 3)}$.
-

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x-2}{(x+2)^3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно 2 решения?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + \frac{6x}{2-3x}}{\sqrt[3]{1-x} + \operatorname{sh} \frac{x}{3} - e^{-x^2/9}}$.

3.② Вычислить $\int \frac{1}{x} \arcsin(\ln x) dx$. 4.④ Вычислить $d^2 f(0;0)$ для $f(x,y) = \exp(x^2 - x \operatorname{arctg} y)$.

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5/3}}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^4}{n^3}\right)$. 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{2\alpha+1} \sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,0,4)$ и прямую $x=3, \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{3}$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = -y \operatorname{tg} x + e^x \cos x$, $y(0) = 1$.

11.④ Решить уравнение $y'' + y' - 2y = -18xe^{-2x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^4 \left(y'^2 + \frac{3y^2}{4x^2} \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(4) = 8$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости ограничена прямыми $y = x$, $y = -x$, $x = 3$, $x = -3$. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 2x^3 - xy^2 - x^2 + y^2.$$

15.④ Разложить функцию $y = \pi - x$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{4x^3 - 12x^2 - 4x - 2}{(2x + 1)(x - 3)}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ не имеет решений?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{sh} x}}{(\cos \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x})^3}$.

3.② Вычислить $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(\cos x) dx$.

4.④ Вычислить $d^2 f(0; 1)$ для $f(x, y) = \ln(e^{xy} - 2 \arctg x)$.

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1 + n^2 x^4} \sin \frac{1}{x\sqrt{n}}.$$

6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x})^{2\alpha} \ln(1+x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^\alpha} dx$.

7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, -1, 1)$ перпендикулярно прямой $x - y + 3z + 5 = 0$, $2x - z + 4 = 0$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $y' = 3y + \frac{e^{3x}}{\sin^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

11.④ Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left((xy' + y)^2 + (1 + x^2)y' \right) dx, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y(2) = -1$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из трёх областей, ограниченных линиями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 6x$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 18x + 30y - 3x^2y - y^3.$$

15.④ Разложить функцию $y = x + 1$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 20x - 10}{(2x - 1)(x - 3)(x + 2)}.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2005/2006 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.⑤ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x+2}{(x+3)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно одно решение?

2.④ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}$.

3.② Вычислить $\int \sin x \cdot \ln \cos x dx$. 4.④ Вычислить $d^2 f \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ для $f(x, y) = \sin(x^3 + 2x \cos y)$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x}}{n} \cdot \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt[3]{n}}.$$

- 6.⑤ Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{(|\ln x|)^{3\alpha+2}}{\sqrt[3]{1-x^2} \operatorname{arctg}^{\alpha+1} x} dx$.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0, -2, 1)$ параллельно прямым $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 10x_4 = -4, \\ -3x_1 - 6x_2 + 12x_3 - 15x_4 = 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 + 25x_4 = -10. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы $K(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10.③ Решить задачу Коши $xy' = 5y + 3x^2$, $y(-1) = -1$.

11.④ Решить уравнение $y'' + 4y = 2 \cos 2x$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{y'^2}{\cos x} + \frac{2y}{\cos^2 x} \right) dx, \quad y(0) = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.⑤ Область G на плоскости — та из четырёх областей, ограниченных линиями $x = 3$, $y = 3$, $x^2 + y^2 = 25$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14.⑤ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 6x^2 + 12y - x^3 - y^3.$$

15.④ Разложить функцию $y = 2x - \pi$, $0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по системе $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$. Построить график суммы ряда.

16.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \frac{6x^2 - 4x - 23}{(2x + 3)(x - 2)}$.
