Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть I

Фамилия студента ________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $y^5+x=3y+x^5+2$ и удовлетворяющей условию $y(0)=-1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u=\dfrac{x^2}{2}+y^2-\dfrac{z^2}{2}$ в направлении градиента этого же поля в точке $(0;2;3)$.

3.③ Найти в точке $x=0$ производные 7-го и 8-го порядков функции $y(x)=\dfrac{1}{7(4+x^2)}$.

4.③ Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(-1;1)$, у которой производная разрывна в $x=0$. Проанализировать, может ли функция, удовлетворяющая таким условиям, иметь в точке $x=0$ производную 2-го порядка.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции
$$f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

6.② Построить график функции $y=e^{\frac{1}{x}}$, $x\in(-\infty;0)$.

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x)=\ln(x^2-3x+4)$ в окрестности точки $x=2$ с точностью до $o((x-2)^2)$.

8.③ Вычислить предел
$$\lim_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{1-6x}+x^2\cos\frac{1}{x}}{x(1+x\ln\operatorname{sh}x)}.$$

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+6}\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл
$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^\alpha 2x\sqrt[3]{\cos x}}.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{\ln(1+x)}\,dx$.

12.② а) Исследовать на потенциальность векторное поле $\vec{a} = (x + y^2; 2xy + 1)$.
б) Найти работу этого поля вдоль прямолинейного отрезка с началом в точке $A(1;1)$ и концом в точке $B(0;-1)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию
$$u = x^3 + xy + y^2 + y.$$

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = 4x - y$ может иметь экстремум при условии $x^2 - y^2 = 15$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \sin|x^2 - y^2|$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = x - y$, $\eta = 2x$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,\operatorname{arctg}(xn)}{x^2 + n^2}, \quad E = (-\infty, +\infty).$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \dfrac{x^3}{9}$, $x \in (1;3)$ в ряд Фурье $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x + b_n \sin \pi n x$. Не вычисляя коэффициентов Фурье, построить на отрезке $[-5;5]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 0$, $x = -1$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[-5;5]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию можно приблизить с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\cos kx$, $k = 0, 1, \ldots$ по норме пространства C на отрезке
а) $[-\pi;0]$; б) $[-\pi;\pi]$.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-xn^2}$ определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть II

Фамилия студента ______________________________ № группы ________

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Вычислить интеграл $\int_\Gamma (y^2 - xy)\,dx + x(2y+1)\,dy$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;2)$, $D(1;2)$, положительно ориентированная относительно конечной области, которую Γ ограничивает.

22.② Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x; x-y; 5y+z)$ через ориентированную внешней нормалью границу области, ограниченной конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 2$, $z = 3$.

23.③ Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S y^4\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $z \leqslant 0$.

24.③ Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (2z; x + y^2; y + 1)$ по контуру $\Gamma = S_1 \cap S_2$, S_1: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, S_2: $2x + 2y + z - 3 = 0$, ориентированному отрицательно относительно нормали $\vec{N} = (2;2;1)$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(4;0)$, $C(2;3)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

26.② Прямая l проходит через точку $M_1(1;2;3)$ и параллельна вектору $\vec{a} = (1;2;3)$. Вычислить расстояние ρ от точки $M_0(-1;0;3)$ до прямой l.

27.② Найти точку пересечения прямой $[\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}] = \vec{0}$ с плоскостью $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, $(\vec{a}, \vec{n}) \neq 0$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ в точке $M_0\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Указать значение параметра α, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \alpha \end{cases}$$
совместна, и выписать общее решение системы при этом значении α.

30.② Линейное преобразование в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе e_1', e_2', если $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 - 2e_2$.

31.① Самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения
$$2y'' - 5y' + 3y = 2e^x + 6.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + z, \\ \dot{y} = -3y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 3z, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_{2,3} = -3 \pm i. \end{matrix}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения
$$(yx^4 + 3)\,dx + x^5\,dy = 0,$$
проходящую через точку $(1;2)$.

36.③ Решить уравнение
$$x^2(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad x \neq 0,$$
зная, что $y = x$ — решение соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение
$$yy' + x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2}.$$

38.③ Найти решение уравнения
$$2xy'y'' = y'^2 + 1,$$
удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \dfrac{1}{3}$, $y'(1) = 1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x - e^{6(y-x)}, \\ \dot{y} = x - \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$$
определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости x,y для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу
$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \left(y'^2 + 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) yy' + 2y \sin x \right) dx, \quad y(0) = 0.$$

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА   Часть I

Фамилия студента ______________________________   № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(1)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $4y-y^3+x+x^3=2$ и удовлетворяющей условию $y(0)=1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u=x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2$ в направлении внешней нормали к поверхности $2x^2+y^2+2z^2=5$ в точке $(1;1;-1)$.

3.③ Найти в точке $x=0$ производные 6-го и 7-го порядков функции

$$y(x)=\sin\left(\frac{x^3}{3}+\frac{\pi}{4}\right).$$

4.③ Найти вторую производную функции $f(x)$ и исследовать $f''(x)$ на непрерывность в точке $x=0$, если $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x^2} y(t)\,dt, x\in(-1;1)$, $y(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$, $y(0)=0$.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{9x^2-1}}.$$

6.② Построить график функции

$$y=ex^2\ln x,\quad x\in(0,+\infty).$$

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x)=e^{x^2-1}$ в окрестности точки $x=1$ с точностью до $o((x-1)^2)$.

8.③ Вычислить предел

$$\lim_{x\to+0}\left(2\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right)^{x+\operatorname{sh}x}.$$

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{(x-x^2)^\alpha}{\ln^{1/3}(1+x)}\,dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{x\cos 4x}{x^2-5}\,dx$.

12.② Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \frac{2\,dx}{y} + 3x\,dy$, где Γ — дуга параболы $y = x^2$, с началом в точке $A(2;4)$ и концом в точке $B(1;1)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + xy - \frac{1}{6}y^2.$$

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = 8x + 4y - 1$ может иметь экстремум при условии $8x^2 - y^2 + 2 = 0$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \operatorname{tg}\sqrt{|xy|}$.

16.③ Решить уравнение $u_{yy} + 2u_{xy} = 8x$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = x$, $\eta = x - 2y$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad E = [0;1).$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \frac{(x - 4\pi)^4}{\pi^4}$, $x \in [3\pi; 5\pi]$ в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Не вычисляя коэффициентов Фурье, построить на отрезке $[-\pi; 6\pi]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 0$, $x = \pi$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[3\pi; 5\pi]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию, обращающуюся в нуль на концах отрезка а) $[0;\pi]$; б) $[\pi; 3\pi]$ можно приблизить на заданном отрезке с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$ по норме пространства C.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{(n-x)n}}$ определена и бесконечно дифференцируема при любом x.

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть II

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \left(\frac{x}{r} + 1; \frac{y}{r} + x\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. вдоль окружности $r = 2$, положительно ориентированной относительно области $r < 2$.

22.② Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x^2 + y)\,dy\,dz + 2y\,dz\,dx + dx\,dy$, где S — внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

23.③ Найти поток векторного поля $\vec{a} = (1; yz^3; x^3)$ через ориентированную внутренней нормалью цилиндрическую поверхность $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant R$.

24.③ Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma (x^2 + z)\,dx + (x - z)\,dy + 2y\,dz$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$, положительно ориентированная относительно нормали $\vec{N} = (1; 1; 1)$, к плоскости $x + y + z = 2$.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Даны вершины треугольника $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(3; 2)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A.

26.② Вычислить расстояние между прямыми l_1, l_2, если

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + 6t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = 1 - 2t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = -4t, \\ y = 5 - 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

27.② Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ и параллельной прямой l, если

$$l : \begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1, \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2 \end{cases}, \ (\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) \neq 0.$$

28.① Составить уравнение касательной к кривой $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M_0\left(-10; \frac{8}{3}\right)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Найти общее решение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

30.② Линейное преобразование в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе e_1', e_2', если $e_1' = e_1 + 2e_2$, $e_2' = e_1 + e_2$.

31.① Самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения
$$y'' - 4y' + 5y = 16\sin^2\frac{x}{2}.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_{2,3} &= -4. \end{aligned}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения
$$y\,dx = (2x + y^2 \ln y)\,dy,$$
проходящую через точку $(0;1)$.

36.③ Найти общее решение уравнения
$$(e^x - 1)y'' + 2y' - e^x y = e^x, \quad x > 0,$$
зная его частное решение $y_1 = -1$ и решение $y_0 = e^x + 1$ соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение
$$x(x^2 + y^2)\,dx + 2y(y\,dx - x\,dy) = 0,$$
$$x \neq 0.$$

38.③ Найти решение уравнения
$$y''y + y'^2 = 2yy',$$
удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = -1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - \sin y, \\ \dot{y} = 2\left(\dfrac{1}{xy + x} - 1\right), \end{cases}$$
определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости x,y для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу
$$J(y) = \int_1^2 \left(xy'^2 + 2yy' + \frac{4}{x}y^2 + 6y\right)dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = -1.$$

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть I

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^5+4y=x+y^5+3$ и удовлетворяющей условию $y(0)=1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u=x^2+\dfrac{y^2}{2}-z^2$ в точке $(1;-2;2)$ в направлении радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки.

3.③ Найти в точке $x=0$ производные 8-го и 9-го порядков функции $y(x)=\dfrac{1}{5}e^{\frac{1+x^2}{2}}$.

4.③ Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(-2;2)$, у которой производная разрывна в $x=-1$. Проанализировать, может ли функция, удовлетворяющая таким условиям, иметь в точке $x=-1$ производную 2-го порядка.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции
$$f(x)=\frac{x^2e^x-e^{2x}}{x-1}.$$

6.② Построить график функции
$$y=\frac{e\ln(-x)}{x},\quad x\in(-\infty;0).$$

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x)=\ln\dfrac{x}{3x+4}$ в окрестности точки $x=-2$ с точностью до $o((x+2)^2)$.

8.③ Вычислить предел
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x(e^{\frac{1}{x}}-1)\Big)^{x+\sin 2x}.$$

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл
$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x-1}\right)^{\alpha}dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos\frac{1}{x}\cdot\sin x\,dx$.

12.② а) Исследовать на потенциальность векторное поле $\vec{a} = (3x^2y + 1; x^3)$.
б) Найти работу этого поля вдоль прямолинейного отрезка с началом в точке $A(5;0)$ и концом в точке $B(3;4)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + 6xy + 6y^2.$$

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = 2x - y - 3$ может иметь экстремум при условии $x^2 - y^2 = 27$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \operatorname{arctg}\left|x^2 - \dfrac{y^2}{2}\right|$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 2$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = 3x - y$, $\eta = x$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n + x}, \quad E = [0;1].$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \dfrac{x^5}{8}$, $x \in (-1;2)$ в ряд Фурье $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{2\pi nx}{3} + b_n \sin\dfrac{2\pi nx}{3}$. Не вычисляя коэффициентов Фурье, построить на отрезке $[-3;5]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 3$, $x = 5$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[-3;5]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию можно приблизить с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\cos kx$, $k = 0, 1, \ldots$ по норме пространства C на отрезке
а) $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$; б) $[\pi; 3\pi]$.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^{nx}}$ определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть II

Фамилия студента ______________________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Вычислить интеграл $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x-y^2)\,dy$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$, $D(1;2)$, положительно ориентированная относительно конечной области, которую Γ ограничивает.

22.② Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (2xy+xz^2)\,dy\,dz - 3yz\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности, являющейся границей области, ограниченной цилиндром $x^2+y^2=1$, $x \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 3$, и плоскостями $x=0$, $z=0$, $z=3$.

23.③ Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x^6; z; z^2)$ через ориентированную внешней нормалью коническую поверхность $z^2 = x^2+y^2$ при $y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

24.③ Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (2y; 2z; x)$ по контуру $\Gamma = S_1 \cap S_2$, S_1: $z = x^2+y^2$, S_2: $x+y-z=0$, ориентированному отрицательно относительно нормали $\vec{N} = (1;1;-1)$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Найти расстояние между прямыми l_1, l_2 на плоскости, если

$$l_1 : \begin{cases} x = 1+t, \\ y = -2+2t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 2+t, \\ y = 1+2t. \end{cases}$$

26.② Написать уравнение плоскости, проходящую через точку $M_0(1;0;2)$, перпендикулярно линии пересечения плоскостей $x+y-z+2=0$ и $4x-3z+3=0$.

27.② Найти точку пересечения прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ с плоскостью $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{b}u + \vec{c}v$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $y = 16x$ в точке $M_0(1;-4)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Указать значение параметра α, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = \alpha \end{cases}$$
совместна, и выписать общее решение системы при этом значении α.

30.② Линейное преобразование в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе e'_1, e'_2, если $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = 2e_1 - e_2$.

31.① Самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения
$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x} + 9x + 6.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_{2,3} &= -1 \pm i. \end{aligned}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения
$$(2x\cos x - y\,\mathrm{tg}\,x)\,dx - dy = 0,$$
проходящую через точку $(0;0)$.

36.③ Решить уравнение
$$(x-1)y'' + (1-2x)y' + xy = \frac{e^x}{x-1}, \quad x > 1,$$
зная, что $y = e^x$ — решение соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение
$$xy' - y = 3x^4 e^{-2\frac{y}{x}}.$$

38.③ Найти решение уравнения
$$x(yy'' - y'^2) = yy',$$
удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = y'(1) = 1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(y - 4x), \\ \dot{y} = e^x - 2e^{2x} + 1, \end{cases}$$
определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости x,y для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу
$$J(y) = \int_0^{\pi} \left(y'^2 - 8xyy' + 10y\cos x\right) dx, \quad y(\pi) = 1.$$

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть I

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $2y+xy^3+2e^x=0$ и удовлетворяющей условию $y(0)=-1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}$ в направлении градиента поля $v=xy-z^2$ в точке $(3;0;-2)$.

3.③ Найти в точке $x=0$ производные 6-го и 7-го порядков функции $y(x)=\dfrac{1}{3-x^3}$.

4.③ Найти вторую производную функции $f(x)$ и исследовать $f''(x)$ на непрерывность в точке $x=0$, если $f(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{1} y(t)\,dt,\ x\in(-1;1)$, $y(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$, $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$, $y(0)=0$.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{x^2-x}}{x^2-4}.$$

6.② Построить график функции

$$y=2^{-\frac{1}{x}},\quad x\in(0;+\infty).$$

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-1}$ в окрестности точки $x=3$ с точностью до $o((x-3)^2)$.

8.③ Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln(1+x)-3\cos x}{2x+\ln\operatorname{sh}x}.$$

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{\alpha}2x\,dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{4x^2+5}\,dx$.

12.② Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} 7y\sqrt{x}\,dx + 2(x^2+y)\,dy$, где Γ — дуга параболы $y = 1 - x^2$ с началом в точке $A(1;0)$ и концом в точке $B(0;1)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^3 + xy + x.$$

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = x - 4y - 2$ может иметь экстремум при условии $x^2 - 2y^2 + \dfrac{1}{7} = 0$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \operatorname{sh}\sqrt{|xy|}$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx} - 2u_{xy} = 8(2x+y)$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = y$, $\eta = 2x + y$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n + x^n}, \quad E = [0;+\infty).$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \pi^2 - (x-2\pi)^2$, $x \in [\pi;3\pi]$ в ряд Фурье $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
Не вычисляя коэффициентов Фурье, построить на отрезке $[-2\pi;4\pi]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 0$, $x = -\pi$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[\pi;3\pi]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию, обращающуюся в нуль на концах отрезка а) $[-\pi;0]$; б) $[-\pi;\pi]$, можно приблизить на заданном отрезке с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$ по норме пространства C.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{n(x-n)}}{\sqrt{n}}$ определена и бесконечно дифференцируема при любом x.

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА   Часть II

Фамилия студента ______________________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \left(\dfrac{x}{r^2} - y; \dfrac{y}{r^2} + 2\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. вдоль окружности $r = 3$, положительно ориентированной относительно области $r < 3$.

22.② Найти поток векторного поля $\vec{a} = (xz; 3y + z; 0)$ через ориентированную внешней нормалью поверхность $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $z = 2$, $z = 3$.

23.③ Вычислить поверхностный интеграл $\displaystyle\iint\limits_S (3x - z)\,dy\,dz + (y + 2z)\,dx\,dy$, где S — плоский треугольник с вершинами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, ориентированный нормалью $\vec{N} = (1; 1; 1)$.

24.③ Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_\Gamma y\,dx - z\,dy + (z^3 - 2x)\,dz$, где контур $\Gamma = S_1 \cap S_2$, $S_1\colon\ x^2 + y^2 = 1$, $S_2\colon\ 3x + y + z = 1$, положительно ориентирован относительно нормали $\vec{N} = (3; 1; 1)$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Даны две вершины треугольника $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$ треугольника ABC и точка $D(1; 2)$ пересечения его высот. Составить уравнение стороны AC.

26.② Найти расстояние ρ между двумя параллельными прямыми l_1 и l_2:

$$l_1\colon\ \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{2},$$
$$l_2\colon\ \frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{2}.$$

27.② Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ и перпендикулярной плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$, $[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] \neq \vec{0}$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $xy = 2$ в точке $M_0(1; 2)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Найти общее решение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

30.② Линейное преобразование в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе e_1', e_2', если $e_1' = 2e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$.

31.① Самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения
$$y'' - 2y' = 4x + 5\sin x.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_{2,3} = 1. \end{matrix}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения
$$y^3\,dx = (4xy^2 - 6)\,dy,$$
проходящую через точку $(2;1)$.

36.③ Найти общее решение уравнения
$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 1, \quad 0 < x < 1,$$
зная два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = 5x + 1$.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение
$$y^2(x^2\,dy + 2xy\,dx) + x\,dy = y\,dx.$$

38.③ Найти решение уравнения
$$2xy'y'' = y'^2 + x^2,$$
удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(2xy - y + 1), \\ \dot{y} = \sqrt[4]{1 + 12x} - 1, \end{cases}$$
определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости x,y для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу
$$J(y) = \int_{1/2}^{1} \left(x^3y'^2 - 3x^2yy' - 4y\right) dx, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 9, \quad y(1) = \frac{3}{2}.$$

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть I

Фамилия студента ____________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(1)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $y^3 + y = x^3 + x$ и удовлетворяющей условию $y(1) = 1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u = xy - z^2$ в направлении внутренней нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $(1;1;2)$.

3.③ Найти в точке $x = 0$ производные 7-го и 8-го порядков функции

$$y(x) = \frac{1}{12}\cos^2\left(\frac{x^2}{4}\right).$$

4.③ Привести пример функции $f(x)$, дважды дифференцируемой на интервале $(-1;1)$, у которой вторая производная разрывна в точке $x = 0$.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{2^{-x} - \ln|x|}{x^2 + 1}.$$

6.② Построить график функции

$$y = ex\ln^2 x, \quad x \in (0;+\infty).$$

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$ в окрестности точки $x = -1$ с точностью до $o((x+1)^2)$.

8.③ Вычислить предел

$$\lim_{x\to+0}\Big(x(e^{\frac{1}{x}} - 1)\Big)^{x+\sin 2x}.$$

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x(x^2+1)}}\, dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x}\cdot\cos x\, dx$.

12.② а) Исследовать на потенциальность векторное поле $\vec{a} = (x + 2y; 2(x + 2y))$.
б) Найти работу этого поля вдоль прямолинейного отрезка с началом в точке $A(1;3)$ и концом в точке $B(-2;0)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию
$$u = x^3 - 6xy - 6y^2.$$

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = x + 2y - 2$ может иметь экстремум при условии $y^2 - x^2 = 12$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \ln(1 + \sqrt{|x|y^2})$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 6y$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = x + y$, $\eta = y$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{\sqrt[5]{n}}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, \quad E = [0;1].$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \cos x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4nx + b_n \sin 4nx$. Не вычисляя коэффициентов Фурье, построить на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию можно приблизить с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\cos kx$, $k = 0, 1, \ldots$ по норме пространства C на отрезке
а) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$; б) $[0; 2\pi]$.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-x)^n}$ определена и бесконечно дифференцируема при $x < 0$.

Московский физико-технический институт

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2004/2005 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА Часть II

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Вычислить интеграл $\int_\Gamma (x-y)\,dx+(x^2+y)\,dy$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$, положительно ориентированная относительно конечной области, которую Γ ограничивает.

22.② Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (yz^2+y^2)\,dz\,dx+z(x-2y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности, являющейся границей области, ограниченной параболоидом $z=x^2+y^2$, $0\leqslant z\leqslant 2$, и плоскостью $z=2$.

23.③ Найти поток поля радиуса-вектора $\vec r=(x;y;z)$ через ориентированную внешней нормалью поверхность $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ при $y\geqslant 0$, $z\leqslant 0$.

24.③ Найти циркуляцию векторного поля $\vec a=(3y+z;x;y)$ по контуру $\Gamma=S_1\cap S_2$, $S_1:\ y^2+z^2=4$, $S_2:\ x+3z=1$, ориентированному положительно относительно нормали $\vec N=(1;0;3)$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Прямая l проходит на плоскости через точку $A(1;2)$ параллельно вектору $\vec a = (2;1)$. Вычислить расстояние от точки $M_0(-1;2)$ до прямой l.

26.② Даны две прямые l_1 и l_2:
$$l_1:\ \begin{cases} x=1,\\ y=3+3t,\\ z=4+4t,\end{cases}\quad l_2:\ \begin{cases} x=1+3t,\\ y=3,\\ z=4+4t.\end{cases}$$
Составить уравнение биссектрисы тупого угла между l_1 и l_2.

27.② Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(r_0)$ и перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей $(\vec r,\vec n_1)=D_1$, $(\vec r,\vec n_2)=D_2$, $[\vec n_1,\vec n_2]\neq\vec 0$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $(y-1)^2=x-1$ в точке $M_0(2;0)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Указать значение параметра α, при котором система уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = \alpha, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$
совместна, и выписать общее решение системы при этом значении α.

30.② Линейное преобразование в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе e_1', e_2', если $e_1' = -e_1 + 2e_2$, $e_2' = -e_1 + e_2$.

31.① Самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения
$$y'' + 4y' + 8y = 8\,\mathrm{sh}\,2x.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8y + 6z, \\ \dot{y} = -4x + 10y + 6z, \\ \dot{z} = 4x - 8y - 4z, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_{2,3} = 2. \end{matrix}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения
$$x\,dy = (y(1+x) + x^3e^x)\,dx,$$
проходящую через точку $\left(1; \dfrac{e}{2}\right)$.

36.③ Решить уравнение
$$4xy'' + (4x+2)y' + (x+1)y = xe^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0,$$
зная, что $y = e^{-\frac{x}{2}}$ — решение соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение
$$y(xy' - y) = (x^2 + y^2)^2.$$

38.③ Найти решение уравнения
$$y(y''y - y'^2) + 2y' = 0,$$
удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 2$, $y'(2) = \dfrac{1}{2}$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - x + 2y), \\ \dot{y} = \arcsin x, \end{cases}$$
определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости x,y для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу
$$J(y) = \int_1^4 \left(xy'^2 - \frac{yy'\ln x}{2} + \frac{2y}{x}\right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(4) = 4.$$
