

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ 2002/2003 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ группы _____

1. Найти y' , если $y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{tg} x}$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = e^{|x|} - \operatorname{tg} |x|$?

3. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{e^{2x^2} - \operatorname{ch} x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.
---	---

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $[0; +\infty)$, пусть $f(x) \neq 0 \forall x \geq 0$.
Верно ли, что

а)* существует $\max_{x \in [0; +\infty)} f(x)$;

в)* существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

б)* $f(x)$ не меняет знак на $[0; +\infty)$;

г)* $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$?

5. Функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4}$

а) разложить в ряд Тейлора по степеням x ;

б) найти радиус сходимости этого ряда.

6. Для функции $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$.

8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$.

9. Найти все значения α , при которых сходятся интегралы

а) $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^\alpha} dx$;

б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^\alpha} dx$.

10.* Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ равномерно на множестве $(0; 1)$?

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y) dx dy$ как повторный в порядке (r, φ) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, область G задана неравенствами $x^2 + y^2 - 2y < 0$, $x > y$.

12. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_C \cos y dx + x(1 - \sin y) dy$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная по часовой стрелке.

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $\iint_{\Sigma} z dS$, где Σ — часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < h$.
14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода $\iint_{\Sigma} z^2(x+1) dydz$, где Σ — внутренняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = x^2$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ по системе $\{\sin(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$.

б)* Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi; \pi]$?

в)* Полна ли система $\{\sin(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z+5}{3}$ и плоскостью $2x - 3y + z = 7$.

17. Пусть $A = \begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix}$. а) Найти A^{-1} .

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1)* самосопряженным,

2)* ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}, \text{ где } \bar{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}.$$

18. Написать уравнение, задающее множество точек, равноудаленных от прямых $\ell_1 : x = 0, z = 1$ и $\ell_2 : y = 0, z = -1$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

19. Найти общее решение уравнения

а) $xy' - 2y = x^2$;

б) $y'' + y = \sin x$.

20. Для вариационной задачи

$$J(y) = \int_1^2 \left((y')^2 + \frac{2y^2}{x^2} \right) dx,$$

$$y(1) = 2, \quad y(2) = 1$$

а) написать уравнение Эйлера;

б) найти стационарную точку функционала.

21. Найти вероятности событий A и B , если справедлива система

$$\begin{cases} P(A + \bar{B}) = 2/3, \\ P(\bar{A} + B) = 5/6, \\ P(A + B) = 2/3. \end{cases}$$

22. Найти $M\xi^2$, если характеристическая функция $\varphi_{\xi}(t) = e^{-it-2t^2}$.

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ 2002/2003 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ группы _____

1. Найти y' , если $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = |x|^3 e^x - \sin^3 |x|$?

3. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$;	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.
---	--

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, пусть $f(x) \neq 0$

$\forall x \geq 0$. Верно ли, что

а)* существует $\max_{x \in (0;1)} f(x)$;

б)* существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x)$ монотонна на $(x_0; +\infty)$;

в)* функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена на $[0; +\infty)$;

г)* функция $\frac{1}{f(x)}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$?

5. Функцию $f(x) = \ln(9 + x^2)$

а) разложить в ряд Тейлора по степеням x ;

б) найти радиус сходимости этого ряда.

6. Для функции $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x}}$.

8. Вычислить интеграл $\int_{-1/2}^0 \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 1}$.

9. Найти все значения α , при которых сходятся интегралы

а) $\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx$;

б) $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx$.

10.* Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^4}{n^4+x^4}$ равномерно на множестве $(1; +\infty)$?

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y) dx dy$ как повторный в порядке (φ, r) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, область G задана неравенствами $x^2 + y^2 - 2x < 0$, $x + y > 0$.

12. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_C (y + e^{-y}) dx - x e^{-y} dy$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная по часовой стрелке.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $\iint_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{1+2z}} dS$, где Σ — часть поверхности эллиптического параболоида $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < R^2$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода $\iint_{\Sigma} (3x^2 y + y^3) dz dx$, где Σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ по системе $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

б) * Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi; \pi]$?

в) * Полна ли система $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0; \frac{\pi}{2}]$?

16. Найти угол между прямой $x - 2 = \frac{y - 5}{4} = \frac{z - 1}{2}$ и плоскостью $x - 4y + 2z = 1$.

17. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$. а) Найти A^{-1} .

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1)* самосопряженным,

2)* ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$, где $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

18. Написать уравнение, задающее множество точек, равноудаленных от плоскости $z = 0$ и точки $(0; 0; 1)$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

19. Найти общее решение уравнения

а) $y' - 2xy = x e^{x^2}$;

б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

20. Для вариационной задачи

$$J(y) = \int_1^2 \left(\frac{(y')^2}{x^2} - \frac{2y^2}{x^4} \right) dx,$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 4$$

а) написать уравнение Эйлера;

б) найти стационарную точку функционала.

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

21. Найти вероятности событий A и B , если справедлива система
- $$\begin{cases} P(\bar{A} + \bar{B}) = 3/4, \\ P(\bar{A} + B) = 3/4, \\ P(\bar{A} \bar{B}) = 1/4. \end{cases}$$
22. Найти $M\xi^2$, если характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = e^{it-t^2/2}$.
-

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ 2002/2003 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ группы _____

1. Найти y' , если $y = (\ln x)^{\arcsin x}$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \cos |x| + \sin^5 |x|$?

3. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{sh} 2x}{e^{2x^3} - \cos x^2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)^x$.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

пусть $f(x) \neq 0 \quad \forall x \geq 0$. Верно ли, что

а)* существует $\max_{x \in [0; +\infty)} f(x)$;

в)* функция $\frac{1}{f(x)}$ не ограничена на $[0; +\infty)$;

б)* существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x)$ монотонна на $[0; x_0]$;

г)* функция $\frac{1}{f(x)}$ равномерно непрерывна на $(0; 1)$?

5. Функцию $f(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t^2 dt$

а) разложить в ряд Тейлора по степеням x ;

б) найти радиус сходимости этого ряда.

6. Для функции $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}$.

8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^0 \frac{(x+1) dx}{x^2 + 4x + 5}$.

9. Найти все значения α , при которых сходятся интегралы

а) $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} \sin e^x dx$;

б) $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \sin e^x dx$.

10.* Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^3 n^3 + 1}$ равномерно на множестве $(0; 1)$?

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y) dx dy$ как повторный в порядке (φ, r) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, область G задана неравенствами $x^2 + y^2 - 2y < 0$, $x^2 + y^2 > 2$.

12. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_C (y + \operatorname{arctg} y) dx + \frac{x dy}{1 + y^2}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$, где Σ — часть поверхности гиперболического параболоида $z = xy$, $x^2 + y^2 < R^2$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода $\iint_{\Sigma} (x^2 + z^3) dx dy$, где Σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ по системе $\{\cos(2k + 1)x\}_{k=0}^{\infty}$.

б)* Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi; \pi]$?

в)* Полна ли система $\{\cos(2k + 1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 3}{4} = z + 1$ и плоскостью $4x - 3y - z = 5$.

17. Пусть $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$. а) Найти A^{-1} .

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1)* самосопряженным,

2)* ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$, где $\bar{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$.

18. Написать уравнение, задающее множество точек $M(x; y; z)$ таких, что расстояние от точки M до плоскости $z=0$ в два раза больше расстояния от M до точки $(0; 0; 1)$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

19. Найти общее решение уравнения

а) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$;

б) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

20. Для вариационной задачи

$$J(y) = \int_1^2 \left(x(y')^2 + \frac{4y^2}{x} \right) dx,$$

$$y(1) = 4, \quad y(2) = 1$$

а) написать уравнение Эйлера;

б) найти стационарную точку функционала.

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

21. Найти вероятности событий A и B , если справедлива система
- $$\begin{cases} P(\bar{A} + B) = 2/3, \\ P(\bar{A} \bar{B}) = 1/6, \\ P(A + \bar{B}) = 5/6. \end{cases}$$
22. Найти $M\xi^2$, если характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = e^{-2it-2t^2}$.
-

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ 2002/2003 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____ группы _____

1. Найти y' , если $y = (\operatorname{ch} x)^{\arccos x}$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \operatorname{sh} |x| \ln(1+x)$?

3. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \operatorname{ch} x}{\sqrt{1+x^2} - e^{x^2}} ; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{sh} \frac{1}{x} \right)^{x^2} .$$

4. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна и ограничена на $[0; +\infty)$, пусть $f(x) \neq 0 \forall x \geq 0$. Верно ли, что

а)* существует $\max_{x \in [0;1]} \frac{1}{f(x)}$;

в)* существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

б)* $f(x)$ не меняет знак на $(0; 1)$;

г)* функция $\frac{1}{f(x)}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$?

5. Функцию $f(x) = \int_0^x \operatorname{ch} t^2 dt$

а) разложить в ряд Тейлора по степеням x ;

б) найти радиус сходимости этого ряда.

6. Для функции $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$;

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{th}(\operatorname{arctg} x) dx}{1+x^2}$.

8. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{(x-2) dx}{x^2 - 6x + 10}$.

9. Найти все значения α , при которых сходятся интегралы

а) $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x \ln^\alpha x} dx$;

б) $\int_e^{+\infty} \frac{\sin \ln x}{x \ln^\alpha x} dx$.

10.* Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4 n + 1}{x^4 n^4 + 1}$ равномерно на множестве $(1; +\infty)$?

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y) dx dy$ как повторный в порядке (r, φ) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, область G задана неравенствами $x^2 + y^2 - 2x < 0$, $x^2 + y^2 < 2$.

12. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_C \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} dx + (x + \sqrt{1+x^2}) dy$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 1$, ориентированная против часовой стрелки.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $\iint_{\Sigma} z^3 dS$, где Σ — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода $\iint_{\Sigma} (x^3 + 3xy^2 + 3xz^2) dy dz$, где Σ — внутренняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = x^2$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ по системе $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$.

б) * Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi; \pi]$?

в) * Полна ли система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $\frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и плоскостью $3x - 2y - 4z = 3$.

17. Пусть $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$. а) Найти A^{-1} .

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1)* самосопряженным,

2)* ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$, где $\bar{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$.

18. Написать уравнение, задающее множество точек $M(x; y; z)$ таких, что расстояние от точки M до плоскости $z = 0$ в два раза меньше расстояния от M до точки $(0; 0; 1)$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

19. Найти общее решение уравнения

а) $(x^2 - 1)y' - 2y = (x - 1)^2$;

б) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

20. Для вариационной задачи

$$J(y) = \int_1^2 (x^3 (y')^2 + 3xy^2) dx,$$

$$y(1) = 2, \quad y(2) = 4$$

а) написать уравнение Эйлера;

б) найти стационарную точку функционала.

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

21. Найти вероятности событий A и B , если справедлива система
- $$\begin{cases} P(\bar{A} + B) = 7/9, \\ P(\bar{A} B) = 2/9, \\ P(A + B) = 8/9. \end{cases}$$
22. Найти $M\xi^2$, если характеристическая функция $\varphi_\xi(t) = e^{3it-t^2/2}$.
-

*) За неверный ответ ставится -1 очко.

1.① $y' = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{tg} x} \left(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} x + \frac{\ln \operatorname{sh} x}{\cos^2 x} \right)$ | 2.① $n < 3$

3. а) ① $-\frac{1}{3}$; б) ① $e^{-1/6}$

4. а) да; б) да; в) нет; г) нет

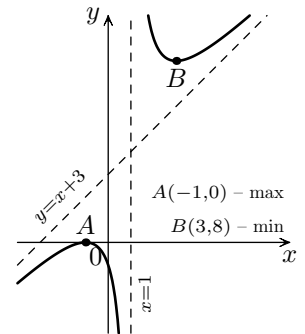
5. а) ① $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{4^{2k+1} (2k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{4k-2}}{4^{2k-1} (2k-1)}$,
 б) ① $R_{\text{сх}} = 2$

6. а) ① $y = x + 3$, $x = 1$; б) ① max: $(-1; 0)$, min: $(3; 8)$;

в) ① $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$, перегибов нет; г) ① См. рис

7.② $-\ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) + C$ | 8.② $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

9. а) ① $\alpha < 3$; б) ① $\alpha > -1$



К задаче 6

10. Да

11.② $\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arcsin(r/2)}^{\pi/4} f d\varphi$ (За отсутствие модуля якобиана снять 1 очко)

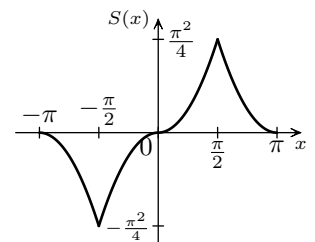
12.② $-\pi$ (За неверный знак снять 1 очко)

13.② $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3} h^3$

14.② $-\frac{4\pi}{15} R^5$

15. а) ① См. рис.; б) сх. равн.; в) не полна

16.① $\arcsin \frac{2}{7}$



К задаче 15

17. а) ① $A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix}$;

б) 1) $\boxed{\pm 1}$ самосопряж., 2) $\boxed{\pm 1}$ ортогон.

в) ① $\lambda_1 = -1$, $h_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$, $\lambda_2 = 1$, $h_2 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$;

г) ① $\bar{x}(t) = C_1 e^{-t} \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\| + C_2 e^t \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

18.② $4z = x^2 - y^2$ гиперболический параболоид (Если уравнение поверхности написано верно, а тип поверхности не определен, или определен неверно, ставить 1 очко)

19. а) ② $y = x^2(\ln|x| + C)$

б) ② $y = -\frac{1}{2}x \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$ (В каждой задаче: за решение однородного уравнения 1 очко, за частное решение неоднородного 1 очко)

20. а) ① $x^2 y'' - 2y = 0$, б) ② $y_0 = \frac{2}{x}$ | **21.②** $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ |

22.② $M\xi^2 = 5$

1.① $y' = (\cos x)^{\arctg x} \left(-\operatorname{tg} x \arctg x + \frac{\ln \cos x}{1+x^2} \right)$ | 2.① $n < 4$

3. а) ① 4; б) ① $e^{1/3}$

4. а) $[\pm 1]$ нет; б) $[\pm 1]$ нет; в) $[\pm 1]$ да; г) $[\pm 1]$ да

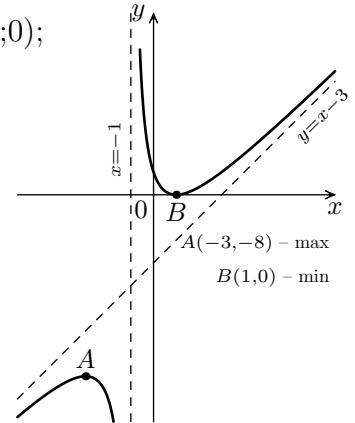
5. а) ① $f(x) = \ln 9 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{9^{k+1} (k+1)} = \ln 9 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{9^k k}$,

б) ① $R_{\text{сх}} = 3$

6. а) ① $y = x - 3$, $x = -1$; б) ① max: $(-3; -8)$, min: $(1; 0)$;

в) ① $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$,

перегибов нет; г) ① См. рис



7.② $\arcsin(\operatorname{sh} x) + C$ | 8.② $\frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8}$

9. а) ① $\alpha > -2$; б) ① $\alpha < 0$

10. $[\pm 1]$ Нет

К задаче 6

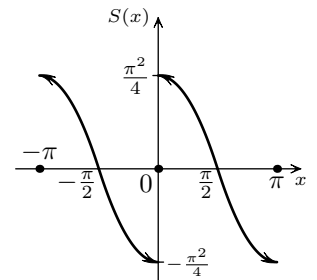
11.② $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} fr dr$ (За отсутствие модуля якобиана снять 1 очко)

12.② π (За неверный знак снять 1 очко)

13.② $\frac{\pi}{4} R^4$

14.② $\frac{8\pi}{5} R^5$

15. а) ① См. рис.; б) $[\pm 1]$ сх. неравн.; в) $[\pm 1]$ не полна



16.① $\arcsin \frac{11}{21}$

К задаче 15

17. а) ① $A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{vmatrix}$;

б) 1) $\begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix}$ не самосопряж., 2) $\begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix}$ ортогон.

в) ① $\lambda_1 = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$, $h_1 = \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix}$, $\lambda_2 = \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$, $h_2 = \begin{vmatrix} -i \\ 1 \end{vmatrix}$;

г) ① $\bar{x}(t) = e^{3t/5} \left(C_1 \begin{vmatrix} -\sin \frac{4}{5}t \\ \cos \frac{4}{5}t \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} \cos \frac{4}{5}t \\ \sin \frac{4}{5}t \end{vmatrix} \right)$

18.② $2z - 1 = x^2 + y^2$ эллиптический параболоид (Если уравнение поверхности написано верно, а тип поверхности не определен, или определен неверно, ставить 1 очко)

19. а) ② $y = e^{x^2}(x^2/2 + C)$

б) ② $y = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$ (В каждой задаче: за решение однородного уравнения 1 очко, за частное решение неоднородного 1 очко)

20. а) ① $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, б) ② $y_0 = x^2$ | 21.② $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ |
22.② $M\xi^2 = 2$

1.① $y' = (\ln x)^{\arcsin x} \left(\frac{\arcsin x}{x \ln x} + \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ | 2.① $n < 5$

3. а) ① -4 ; б) ① $e^{-1/2}$

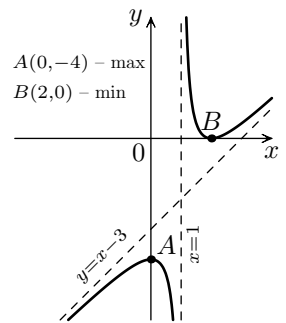
4. а) $\boxed{\pm 1}$ нет; б) $\boxed{\pm 1}$ нет; в) $\boxed{\pm 1}$ да; г) $\boxed{\pm 1}$ да

5. а) ① $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)}$,

б) ① $R_{\text{сх}} = +\infty$

6. а) ① $y = x - 3$, $x = 1$; б) ① max: $(0; -4)$, min: $(2; 0)$;

в) ① $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, перегибов нет; г) ① См. рис



К задаче 6

7.② $\text{tg}(\ln x) + C$ | 8.② $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \text{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$

9. а) ① $\alpha > -1$; б) ① $\alpha < 1$

10. $\boxed{\pm 1}$ Нет

11.② $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{\sqrt{2}}^{2 \sin \varphi} fr dr$ (За отсутствие модуля якобиана снять 1 очко)

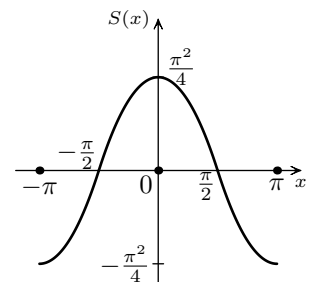
12.② $-\pi$ (За неверный знак снять 1 очко)

13.② $\pi \left(R^2 + \frac{R^4}{2} \right)$

14.② $\frac{4\pi}{5} R^5$

15. а) ① См. рис.; б) $\boxed{\pm 1}$ сх. равн.; в) $\boxed{\pm 1}$ не полна

16.① $\arcsin \frac{1}{26}$



К задаче 15

17. а) ① $A^{-1} = \left\| \begin{matrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{matrix} \right\|$;

б) 1) $\boxed{\pm 1}$ самосопряж., 2) $\boxed{\pm 1}$ не ортогон.

в) ① $\lambda_1 = -4$, $h_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$, $\lambda_2 = 1$, $h_2 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

г) ① $\bar{x}(t) = C_1 e^{-4t} \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\| + C_2 e^t \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

18.② $4x^2 + 4y^2 + 3(z - 4/3)^2 = 4/3$ эллипсоид (Если уравнение поверхности написано верно, а тип поверхности не определен, или определен неверно, ставить 1 очко)

19. а) ② $y = (x^2 + 1)(\operatorname{arctg} x + C)$

б) ② $y = \frac{x^2}{2} e^{-x} + (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ (В каждой задаче: за решение однородного уравнения 1 очко, за частное решение неоднородного 1 очко)

20. а) ① $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$, б) ② $y_0 = \frac{4}{x^2}$ | 21.② $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ |

22.② $M\xi^2 = 8$

1.① $y' = (\operatorname{ch} x)^{\arccos x} \left(\operatorname{th} x \arccos x - \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ | 2.① $n < 2$

3. а) ① 5; б) ① $e^{1/6}$

4. а) $\boxed{\pm 1}$ да; б) $\boxed{\pm 1}$ да; в) $\boxed{\pm 1}$ нет; г) $\boxed{\pm 1}$ нет

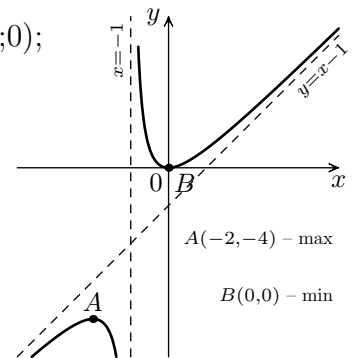
5. а) ① $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(2k)!(4k+1)}$,

б) ① $R_{\text{сх}} = +\infty$

6. а) ① $y = x - 1$, $x = -1$; б) ① max: $(-2; -4)$, min: $(0; 0)$;

в) ① $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$,

перегибов нет; г) ① См. рис



К задаче 6

7.② $\ln(\operatorname{ch}(\operatorname{arctg} x)) + C$ | 8.② $-\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$

9. а) ① $\alpha < 2$; б) ① $\alpha > 0$

10. $\boxed{\pm 1}$ Да

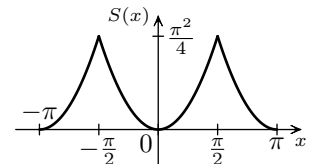
11.② $\int_0^{\sqrt{2}} r \, dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos r/2} f \, d\varphi$ (За отсутствие модуля якобиана снять 1 очко)

12.② π (За неверный знак снять 1 очко)

13.② $\frac{\pi}{2} R^5$

14.② $-\frac{12\pi}{5} R^5$

15. а) ① См. рис.; б) $\boxed{\pm 1}$ сх. равн.; в) $\boxed{\pm 1}$ полна



К задаче 15

16.① $\arcsin \frac{2}{29}$

17. а) ① $A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 5/6 \end{vmatrix}$;

б) 1) $\begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix}$ самосопряж., 2) $\begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix}$ не ортогон.

в) ① $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$, $\lambda_2 = 6$, $h_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$;

г) ① $\bar{x}(t) = C_1 e^t \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} + C_2 e^{6t} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

18.② $x^2 + y^2 - 3(z + 1/3)^2 = -4/3$ двуполостный гиперboloид (Если уравнение поверхности написано верно, а тип поверхности не определен, или определен неверно, ставить 1 очко)

19. а) ② $y = \frac{x-1}{x+1}(x+C)$

б) ② $y = \frac{x}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ (В каждой задаче: за решение однородного уравнения 1 очко, за частное решение неоднородного 1 очко)

20. а) ① $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$, б) ② $y_0 = 2x$ | 21.② $P(A) = 2/3$, $P(B) = 2/3$ |
22.② $M\xi^2 = 10$
