ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2005/2006 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			**Оценка**	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$9u_{tt} = u_{xx} + t\sin\dfrac{x}{3} + x\sin\dfrac{t}{3}$, $(\,t>0,\ x>0\,)$; $\quad u|_{t=0} = 3+3x+\dfrac{3}{2}x^2+\sin 2x$, $(\,x\geqslant 0\,)$;
$u_t|_{t=0} = -\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}x+9\sin\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{3}\cos 2x$, $(\,x\geqslant 0\,)$; $\quad (u-u_x)|_{x=0} = -2-3t+\sin\dfrac{t}{3}$, $(\,t\geqslant 0\,)$.

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{t}{2} - 2\sin t\sin 2x, \quad (t>0, \quad 0<x<\pi); \quad u|_{t=0} = 1, \quad (0\leqslant x\leqslant\pi);$$
$$u_t|_{t=0} = 7+x^2,\ (\,0\leqslant x\leqslant\pi\,); \quad u_x|_{x=0}=0,\ (\,t\geqslant 0\,); \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t,\ (\,t\geqslant 0\,).$$

3.⑥ Решить классическую задачу Коши: $u_{tt} = \dfrac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x+2y)$, $(\,t>0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,)$;
$u|_{t=0} = yz^3$, $(\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,)$; $\quad u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+(x-2z)^2}$, $(\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,)$.

4.③ Решить задачу Неймана:
$$\Delta u = 24(x^2-y^2), \quad (r=\sqrt{x^2+y^2}<1); \quad u_r|_{r=1} = 4\cos 2\varphi + 4\cos 4\varphi, \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(5x^2y^3+7x^3y^2)u(y)\,dy + 5x + 7x^4, \quad u(x)\in C[-1,1],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi, \quad (t>0, \quad r<2, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = f(r)\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right), \quad (r\leqslant 2, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi); \quad u|_{r=2}=0, \quad (t\geqslant 0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);$$
где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(\,t\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f''+4f'+4f = 3\delta+\delta'$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u\in H}\int_{|x|<1}\left(|\nabla u|^2 + 20\frac{x_1x_2}{|x|}u\right)dx,$$
где $H = \{u(x)\in C^1(|x|\leqslant 1),\ u|_{|x|=1} = 2x_1x_2\}$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2005/2006 уч.г.**

Фамилия студента ____________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$4u_{tt} = u_{xx} + 20tx^3 + 20xt^3$, ($t > 0$, $x > 0$); $u|_{t=0} = -1 + 3x^2 + \cos 2x$, ($x \geqslant 0$);
$u_t|_{t=0} = -x - x^5 + \sin 2x$, ($x \geqslant 0$); $u_x|_{x=0} = t + \dfrac{1}{4}t^5 - \dfrac{2}{t+2} + e^{-t/2}$, ($t \geqslant 0$).

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_{tt} = 3u_{xx} + 3u - 3tx - 6t + 9\pi \sin t \sin \frac{x}{2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < \pi); \quad u|_{t=0} = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi);$$
$u_t|_{t=0} = 2 + x$, ($0 \leqslant x \leqslant \pi$); $u|_{x=0} = 2t$, ($t \geqslant 0$); $u|_{x=\pi} = 2t + \pi t$, ($t \geqslant 0$).

3.⑥ Решить классическую задачу Коши:
$u_t = 2\Delta u + xe^{8t-2z}$, ($t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$); $u|_{t=0} = (x+z)^4 \cos y$, ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

4.③ Решить краевую задачу:
$$\Delta u = -\frac{\cos\varphi}{r^2}, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} > 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$(u - u_r)|_{r=1} = 3\sin 2\varphi + 2\cos\varphi$, ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$); $u(r, \varphi)$ — ограниченная функция при $r > 1$.

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y)\, dy + 3\sin x + \cos x, \quad u(x) \in C[-\pi, \pi],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 4\Delta u - u + e^{-t} f(r) \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad (t > 0, \quad r < 5, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{5} r\right) \sin 3\varphi, \quad (r \leqslant 5, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \quad u|_{r=5} = 0, \quad (t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
где $u(t, r, \varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0$, ($t \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$); $f(r) \in C^1[0, 5]$, $f(5) = 0$, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_3(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 9f = 3\delta + 2\delta'$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u \in H} \int_{1<|x|<2} \left(|\nabla u|^2 + 8u\right) dx,$$
где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2)$, $u|_{|x|=1} = 1$, $u|_{|x|=2} = 4 + \ln 2\}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2005/2006 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$u_{tt} = 9u_{xx} + 9t\cos 3x - 9x\cos 3t$, $(\,t > 0\,,\ x > 0\,)$;
$u|_{t=0} = 3 + 5x + 4x^2 + \sin 2x + \cos 2x$, $(\,x \geqslant 0\,)$;
$u_t|_{t=0} = -6 - 24x + 6\sin 2x - 6\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x$, $(\,x \geqslant 0\,)$;
$(u - u_x)|_{x=0} = -2 + \dfrac{1}{9}t - \cos 3t$, $(\,t \geqslant 0\,)$.

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_{tt} = u_{xx} + 5u - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t}\sin 2x, \quad \left(t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\right); \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right);$$
$$u_t|_{t=0} = 1 + x\,, \ \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right); \quad u|_{x=0} = t\,,\ (\,t \geqslant 0\,); \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t\,,\ (\,t \geqslant 0\,).$$

3.⑥ Решить классическую задачу Коши: $u_{tt} = 4\Delta u$, $(\,t > 0\,,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,)$;
$u|_{t=0} = e^x yz$, $(\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,)$; $u_t|_{t=0} = xy^3 + \operatorname{sh}(x^2 + y^2 + z^2)$, $(\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,)$.

4.③ Решить краевую задачу: $\Delta u = 24xy$, $(\,r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\,)$;
$(u + u_r)|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi$, $(\,0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,)$.

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (3xy^2 + 5x^2y)u(y)\,dy + 5x^3 - 7x^4, \quad u(x) \in C[-1,1],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t} J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (t > 0, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad (r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \quad u|_{r=2} = 0, \quad (t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0$, $(\,t \geqslant 0\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,)$; $f(r) \in C^1[0,2]$, $f(2) = 0$, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_1(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 5f' + 4f = 2\delta' - \delta$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u \in H} \int_{|x|<1} \left(|\nabla u|^2 + 16x_1 u\right)\,dx,$$
где $H = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)\,,\ u|_{|x|=1} = x_1\}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2005/2006 уч.г.**

Фамилия студента ________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$u_{tt} = 4u_{xx} - 12tx^2 + 12xt^2\,,\ (\,t > 0\,,\ x > 0\,);\quad u|_{t=0} = -1 + x^2 + \ln(1+x) + e^{-x}\,,\ (\,x \geqslant 0\,);$
$u_t|_{t=0} = 4x + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{1+x} + 2e^{-x}\,,\ (\,x \geqslant 0\,);\quad u_x|_{x=0} = -4t + t^4 + 2\sin 4t\,,\ (\,t \geqslant 0\,).$

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_{tt} = u_{xx} + 39\pi e^{-t}\sin x,\quad \left(t > 0,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\right);\quad u|_{t=0} = 2x,\quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right);$$
$u_t|_{t=0} = 1 - \cos 5x\,,\ \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right);\quad u_x|_{x=0} = 2\,,\ (\,t \geqslant 0\,);\quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi + t\,,\ (\,t \geqslant 0\,).$

3.⑥ Решить классическую задачу Коши:
$5u_t = \Delta u\,,\ (\,t > 0\,,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,);\quad u|_{t=0} = (20x + z^5)e^{x-3y}\,,\ (\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,).$

4.③ Решить краевую задачу:
$$\Delta u = -2\frac{\sin\varphi}{r^2},\quad (r = \sqrt{x^2+y^2} > 1,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$(u - u_r)|_{r=1} = 16\sin^3\varphi\,,\ (\,0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,);\ u(r,\varphi)$ — ограниченная функция при $r > 1$.

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{2}x\cos y + y\cos x\right)u(y)\,dy + x^2 + 2\pi\sin x,\quad u(x) \in C[-\pi,\pi],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 4\Delta u - 2u + f(r)\sin 5\varphi,\quad (t > 0,\quad r < 3,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right)\sin\left(5\varphi - \frac{\pi}{3}\right),\quad (r \leqslant 3,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);\quad u|_{r=3} = 0,\quad (t \geqslant 0,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0\,,\ (\,t \geqslant 0\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,);\ f(r) \in C^1[0,3]\,,$ $f(3) = 0\,,\ \mu_1^{(5)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_5(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 2f' + 5f = 3\delta' - \delta$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)\,,\ \theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u\in H}\int_{1<|x|<2}\left(|\nabla u|^2 + 6\frac{x_2}{|x|}u\right)dx,$$
где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2)\,,\ u|_{|x|=1} = x_2\,,\ u|_{|x|=2} = 2x_2\}\,,\ x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.
