ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = u_{xx} - 2e^x \cos t\,,\ t > 0\,,\ x > 0\,,$
$u|_{t=0} = 3e^x - x^2\,,\ u_t|_{t=0} = 2x\,,\ x \geqslant 0\,, \quad (u + u_x)|_{x=0} = 2e^t + 4\cos t\,,\ t \geqslant 0\,.$

2.⑥ $u_{tt} = u_{xx} + u - xt + 2\cos x\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_t|_{t=0} = \dfrac{\pi}{2}\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \quad u_x|_{x=0} = t\,,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t\,,\ t \geqslant 0\,.$

3.④ $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z)\,,\ t > 0\,,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,,$
$u|_{t=0} = xy^2z\,, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos(x - y + z)\,.$

4.④ $\Delta u = 0\,,\ 1 < r < 2\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$
$u|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi\,,\ u|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin\varphi\,.$

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xy^3 - x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax^2 + x^3$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (**Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов**)

$$u_t = 4\Delta u - u + J_2(\mu_3^{(2)} r)\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t),$$
$$u|_{t=0} = f(r)(2\cos 2\varphi - 3), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u(0)| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_2, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}\,,\ x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,.$

6.⑤ (**Рекомендуется для 4 и 5 факультетов**)

Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\dfrac{d\varepsilon}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$?

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (**Рекомендуется для 2 и 8 факультетов**)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)\,,\ x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3\,,$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 24|x|u)\,dx \geqslant -\frac{8\pi}{7}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 4u_{xx} - 12\cos(x+4t)\,,\ t>0\,,\ x>0\,, \quad u|_{t=0} = x + \cos x + \sin x\,,$
$u_t|_{t=0} = 2\cos x - 2 - 4\sin x\,,\ x \geqslant 0\,, \quad (u - u_x)|_{x=0} = \cos 4t + \sin 4t - 2\cos 2t\,,\ t \geqslant 0\,.$

2.⑥ $u_{tt} = u_{xx} + u + \sin x - \dfrac{\pi}{2}xt\,,\ t>0\,,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\,,$
$u|_{t=0} = 0\,,\ u_t|_{t=0} = \left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)x\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \quad u|_{x=0} = 0\,,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}t\,,\ t \geqslant 0\,.$

3.④ $u_t = \Delta u + (x^2+y^2-2z^2)\cos t\,, \quad t>0\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,, \quad u|_{t=0} = e^{-y^2}\sin(x+z)\,.$

4.④ $\Delta u = 20\,,\ r<\sqrt{3}\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\ \Delta u = u_{xx+}u_{yy} + u_{zz}\,,$
$u|_{r=\sqrt{3}} = 15 + 15\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\sin\varphi\,.$

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin y + \cos y\cos x)\varphi(y)\,dy + ax + \cos x$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (**Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов**)

$$u_t = 9\Delta u - 2u + f(r)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r<2, \quad t>0, \quad u = u(r,\varphi,t),$$

$$u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi + 2J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad u|_{r=2} = 0,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;2]$ функция, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_1, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ (**Рекомендуется для 4 и 5 факультетов**) Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 6\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 8\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t<0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (**Рекомендуется для 2 и 8 факультетов**)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=2} = 1$, имеет место неравенство

$$\int_{1<|x|<2}\left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|}\right)dx \geqslant -\frac{\pi}{3}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 52

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ Семестр $\boxed{6}$ 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 9u_{xx} + 18e^{-3t}\sin x\,,\ t > 0\,,\ x > 0\,,\quad u|_{t=0} = 2x^2 + 2\sin x + \cos x\,,$
$u_t|_{t=0} = -3\cos x\,,\ x \geqslant 0\,,\quad (2u + u_x)|_{x=0} = 4e^{-3t} + 18t^2 + 6t\,,\ t \geqslant 0\,.$

2.⑥ $u_{tt} + 2u = u_{xx} + 2\cos^2 x\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < \pi\,,\quad u|_{t=0} = x^2\,,\ u_t|_{t=0} = 1\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\,,$
$u_x|_{x=0} = 0\,,\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi\,,\ t \geqslant 0\,.$

3.④ $u_{tt} = \Delta u + 9t\sin(2x - 2y + z)\,,\quad t > 0\,,\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$
$u|_{t=0} = 2\sin(2x - 2y + z)\,,\quad u_t|_{t=0} = x^3yz\,.$

4.④ $\Delta u = 0\,,\ 1 < r < 2\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,\quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,,$
$u_r|_{r=1} = 5\sin^2\theta\cos^2\varphi\,,\quad u|_{r=2} = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{5}{2}\cos 2\theta\,.$

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(x^2y^2 - xy)\varphi(y)\,dy + x^3 + a$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (**Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов**)

$$u_t = 5\Delta u - 3u + J_3\left(\frac{1}{4}\mu_2^{(3)}r\right)\cos 3\varphi + f(r)\sin 2\varphi,\quad r < 4,\quad t > 0,\quad u = u(r,\varphi,t),$$
$$u|_{t=0} = f(r)\cos 3\varphi,\quad u|_{r=4} = 0,\quad |u(0)| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;4]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ (**Рекомендуется для 4 и 5 факультетов**) Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 4\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 4\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (**Рекомендуется для 2 и 8 факультетов**)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = x_1 - x_2 + x_3$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1}(|\nabla u|^2 + 2u)\,dx \geqslant \frac{176\pi}{45}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 53

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ Семестр $\boxed{6}$ 2004/2005 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

Решить задачи:

1.④ $u_{tt} = 16u_{xx} - 16te^x\,,\ t > 0\,,\ x > 0\,,\quad u|_{t=0} = 2e^x + x - 2\,,\ u_t|_{t=0} = e^x - 4\,,\ x \geqslant 0\,,$
$(u - 2u_x)|_{x=0} = -\cos 4t + 2\sin 4t - e^{4t} - 9t - 4\,,\ t \geqslant 0\,.$

2.⑥ $u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \dfrac{3}{4}\sin\dfrac{x}{6}\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < 3\pi\,,$
$u|_{t=0} = \pi(1+x) + \sin\dfrac{x}{6}\,,\ u_t|_{t=0} = x\,,\ 0 \leqslant x \leqslant 3\pi\,,\ u|_{x=0} = \pi\,,\ u_x|_{x=3\pi} = \pi\,,\ t \geqslant 0\,.$

3.④ $u_t = \dfrac{1}{4}\Delta u + t^4(x+1)\,,\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\quad t > 0\,,\quad u|_{t=0} = e^{2z - z^2}\cdot\sin(x+y)\,.$

4.④ $\Delta u = \dfrac{1}{r^4}\,,\ r > 2\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\quad u(\infty) = 0\,,\quad (u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right).$

5.⑤ Решите при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos y + y\sin x)\varphi(y)\,dy + \cos x + a\sin x$$

и найдите характеристические числа, собственные функции интегрального оператора.

6.⑤ (**Рекомендуется для 1, 3 и 7 факультетов**)

$$u_t = 3\Delta u - 2u + f(r)\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 3\varphi\right),\quad r < 3,\quad t > 0,\quad u = u(r,\varphi,t),$$

$$u|_{t=0} = 2J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{3}r\right)\sin 3\varphi,\quad u|_{r=3} = 0,\quad |u(0)| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0;3]$ функция, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя J_3, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

6.⑤ (**Рекомендуется для 4 и 5 факультетов**) Найдите в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенное решение уравнения $\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\dfrac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$. Принадлежит ли это обобщенное решение ε пространству обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^1)$? Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщенную производную $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$. Какой обобщенной функцией является $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$: регулярной или сингулярной в $D'(\mathbb{R}^1)$?

6.⑤ (**Рекомендуется для 2 и 8 факультетов**)
Покажите, что для всех функций $u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant e)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=e} = -1$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{1<|x|<e}\left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|^2}\right)dx \geqslant 4\pi(e+1).$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 54