1. (3) Найдите все действительные решения уравнения

$$y''' - 2y'' + 2y' = 5\cos x + 2x.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x + \sin x + 2\cos x + x + \dfrac{x^2}{2}$

Решение.

2. (4) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 3y - 3\sin 2t + 2\cos 2t. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} + C_2 e^{2t} \left(\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} t + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) + \begin{Vmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{Vmatrix}$

Решение.

3. (4) Найдите общее решение уравнения

$$x(3x+1)y'' - (9x^2 - 2)y' - 3(3x+2)y = -2(3x+1)^2.$$

Ответ. $y = C_1 e^{3x} + \dfrac{C_2}{x} + x + \dfrac{2}{3}$

Решение.

4. (4) Решите задачу Коши

$$yy'' + (y')^2 + 2(yy')^3 = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Ответ. $y = \sqrt[4]{4x+1}$

Решение. Так как переменная x явно не входит в уравнение, то делаем замену $y' = p(y)$. Тогда $y'' = pp'$ и исходное уравнение примет вид:

$$ypp' + p^2 = -2y^3p^3.$$

а) при $p = 0$ получаем $y = \mathrm{const}$ – не удовлетворяет начальным условиям.

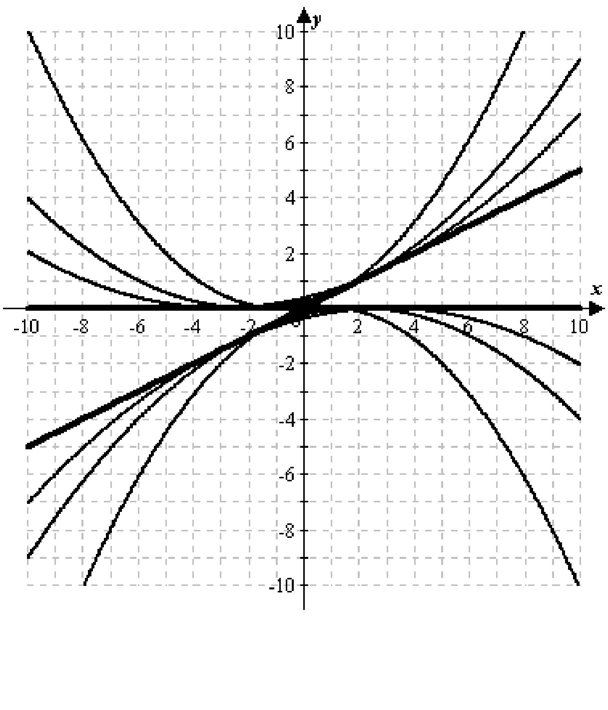
б) при $p \neq 0$ получаем $yp' + p = -2y^3p^2$ – уравнение Бернулли. Замена $z = \dfrac{1}{p}$ приводит к уравнению $yz' - z = 2y^3$. Тогда $\dfrac{yz' - z}{y^2} = 2y$, $\left(\dfrac{z}{y}\right)' = (y^2)'$ и $z = y^3 + Cy$. Так как $z(1) = 1$, то $C = 0$ и, следовательно, $z = y^3$.

Итак, относительно y получаем уравнение $y' = \dfrac{1}{y^3}$. Решая это уравнение, находим, что $y^4 = 4x + D$. Так как $y(0) = 1$, то $D = 1$ и, следовательно, $y = \sqrt[4]{4x+1}$.

5. (5) Решите уравнение, найдите особые решения и изобразите интегральные кривые на координатной плоскости.

$$2xy'^2 - 4yy' + y = 0.$$

Ответ. $y = \dfrac{(x+C)^2}{8C}$; $y = 0$, $y = \dfrac{x}{2}$ – особые решения



Решение.

6. (4) Исследуйте на экстремум функционал

$$\int_0^1 \left(4xyy' - (y')^2 - 4y^2 + (12x^2-4)y\right)\,dx, \qquad y(0)=0,\ y(1)=1.$$

Ответ. $y=x^2$, максимум

Решение. Уравнение Эйлера: $y''-6y=2-6x^2$.

Допустимая экстремаль: $y=x^2$.

Приращение функционала: $\triangle F = -\int_0^1 \left(6h^2+h'^2\right)\,dx$

7. (3) Найдите положения равновесия системы. Определите характер найденных положений равновесия и изобразите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем в их окрестности.

$$\begin{cases} \dot x \;=\; 2\operatorname{arctg} y, \\ \dot y \;=\; \sqrt{1-2x+6y}-1. \end{cases}$$

Ответ. $(0;0)$ – неустойчивый узел

Решение. Единственное положение равновесия – точка $(0;0)$. Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot x \;=\; 2y, \\ \dot y \;=\; -x+3y. \end{cases}$$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $h_1=\begin{Vmatrix}2\\1\end{Vmatrix}$, $h_2=\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}$. Неустойчивый узел.

8. (5) Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши.

$$xy\frac{\partial u}{\partial x}+(y^2-2z^3)\frac{\partial u}{\partial y}-2zy\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad x>0,\ y>0,\ z>0; \qquad u\Big|_{y=x}=\frac{z^3}{x^2}.$$

Ответ. $u=F(x^2z, 2y^2z-z^4)$; $u=\dfrac{2x^2-2y^2+z^3}{x^2}$

Решение.

9. (5) Пусть $y(x,\alpha)$ – решение задачи Коши

$$y'=\alpha(1-x)+y-y^2, \quad y(0)=0.$$

Найдите $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$ и $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$.

Ответ. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=x$, $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}=2x^2+4x+4-4e^x$.

Решение. Пусть $y=y_0+\alpha y_1+\alpha^2y_2+o(\alpha^2)$. Тогда

$$y_0'=y_0-y_0^2, \quad y_0(0)=0 \quad\Rightarrow\quad y_0=0.$$

$$y_1'=(1-x)+y_1, \quad y_1(0)=0 \quad\Rightarrow\quad y_1=x.$$

$$y_2'=y_2-x^2, \quad y_2(0)=0 \quad\Rightarrow\quad y_2=x^2+2x+2-2e^x.$$

1. (3) Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x) + e^{2x}.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}\sin x + C_4e^{2x}\cos x + 3x^2 + x^3 + \dfrac{e^{2x}}{4}$

Решение.

2. (4) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; 2x + y - 2\cos 3t - 3\sin 3t, \\ \dot{y} \;=\; -x + 4y + \cos 3t. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1e^{3t}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + C_2e^{3t}\left(\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}t + \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}\right) + \begin{Vmatrix} \cos 3t \\ 0 \end{Vmatrix}$

Решение.

3. (4) Найдите общее решение уравнения

$$x(x+1)y'' - (2x^2 - 3)y' - 2(2x + 3)y = -6(x + 1)^2$$

Ответ. $y = C_1e^{2x} + \dfrac{C_2}{x^2} + x + \dfrac{3}{2}$

Решение.

4. (4) Решите задачу Коши

$$x(y''y - (y')^2) = yy'\ln\frac{y'}{xy}, \qquad y(1) = 1,\ y'(1) = e.$$

Ответ. $y = \exp\left(\dfrac{e(x^2-1)}{2}\right)$

Решение. Исходное уравнение является однородным относительно y, y', y'', поэтому делаем замену $y' = yz$, при которой $y'' = y(z^2 + z')$.

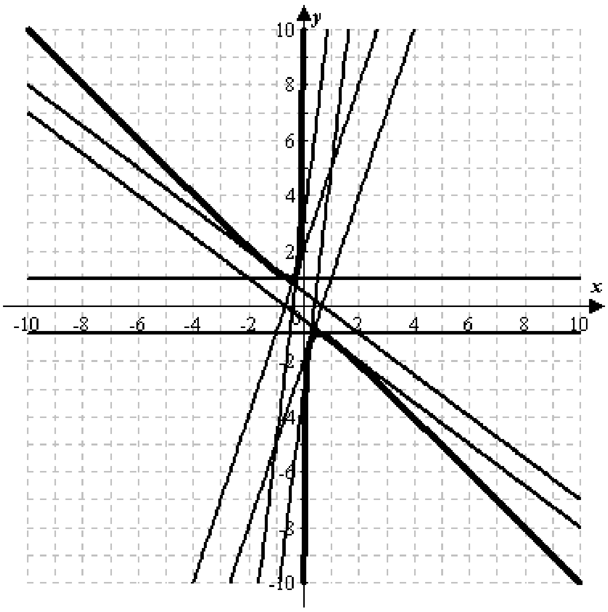
Так как $y \neq 0$, то исходное уравнение примет вид $xz' = z\ln\dfrac{z}{x}$ – однородное уравнение первого порядка. Замена $z = xu$, $z' = u + xu'$, приводит к уравнению $u + xu' = u\ln u$. Функция $u \equiv e$ – решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u(1) = e$. Следовательно, $z = xe$.

Итак, относительно y получаем уравнение $\dfrac{y'}{y} = ex$. Решая это уравнение, находим, что $\ln|y| = \dfrac{ex^2}{2} + D$. Так как $y(1) = 1$, то $D = -\dfrac{e}{2}$ и, следовательно, $y = \exp\left(\dfrac{e(x^2-1)}{2}\right)$.

5. (5) Решите уравнение, найдите особые решения и изобразите интегральные кривые на координатной плоскости.

$$(y - xy')^2 = y' + 1.$$

Ответ. $y = (C^2 - 1)x + C$; $y = -x - \dfrac{1}{4x}$ – особое решение



Решение.

6. 4 Исследуйте на экстремум функционал

$$\int_1^2 \left((y')^2 + 2yy'\sin x + \left(\cos x + \frac{20}{x^2}\right)y^2 + 20x^4 y\right) dx, \qquad y(1) = -1,\ y(2) = 0.$$

Ответ. $y = -4x^4 + 4x^5 - x^6$, минимум

Решение. Уравнение Эйлера: $x^2y'' - 20y = 10x^6$.

Допустимая экстремаль: $y = x^6 - 2x^5$.

Приращение функционала: $\triangle F = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{20h^2}{x^2} + h'^2\right) dx$

7. 3 Найдите положения равновесия системы. Определите характер найденных положений равновесия и изобразите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем в их окрестности.

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x - 2y), \\ \dot{y} = 1 - e^x. \end{cases}$$

Ответ. $(0;0)$ – седло

Решение. Единственное положение равновесия – точка $(0;0)$. Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\|$, $h_2 = \left\|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right\|$. Седло.

8. 5 Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (2ze^z + y)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad y > x,\ z > 0; \qquad u\big|_{y=x} = z^4.$$

Ответ. $u = F(xe^{-z}, ye^{-z} - z^2)$; $u = \left((x-y)e^{-z} + z^2\right)^2$

Решение.

9. 5 Пусть $y(x, \alpha, \beta)$ – решение задачи Коши

$$y'' = y + 3\sin y, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta.$$

Найдите $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0,\beta=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right|_{\alpha=0,\beta=0}$.

Ответ. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0,\beta=0} = \operatorname{ch} 2x$, $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right|_{\alpha=0,\beta=0} = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{2}$.

Решение. Пусть $y = y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2 + o\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$. Тогда

$$y_0'' = y_0 + 3\sin y_0, \quad y_0(0) = 0,\ y_0'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0.$$

$$y_1'' = 4y_1, \quad y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \operatorname{ch} 2x.$$

$$y_2'' = 4y_2, \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}.$$

1. (3) Найдите все действительные решения уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = 2\cos x.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x - \dfrac{x}{2}(\sin x + \cos x)$

Решение.

2. (4) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} \ = \ 3x - y - 3\cos 2t - 2\sin 2t, \\ \dot{y} \ = \ x + y - \cos 2t. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + C_2 e^{2t} \left(\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} t + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) + \begin{Vmatrix} \cos 2t \\ 0 \end{Vmatrix}$

Решение.

3. (4) Найдите общее решение уравнения

$$x(2x-3)y'' + 4(x^2-3)y' + 12(x-2)y = 4(2x-3)^2$$

Ответ. $y = C_1 e^{-2x} + \dfrac{C_2}{x^3} + x - 2$

Решение.

4. (4) Решите задачу Коши

$$yy'' + 4(y')^2 = 6y(y')^{\frac{3}{2}}, \qquad y(2) = y'(2) = 1.$$

Ответ. $y = \dfrac{1}{3-x}$

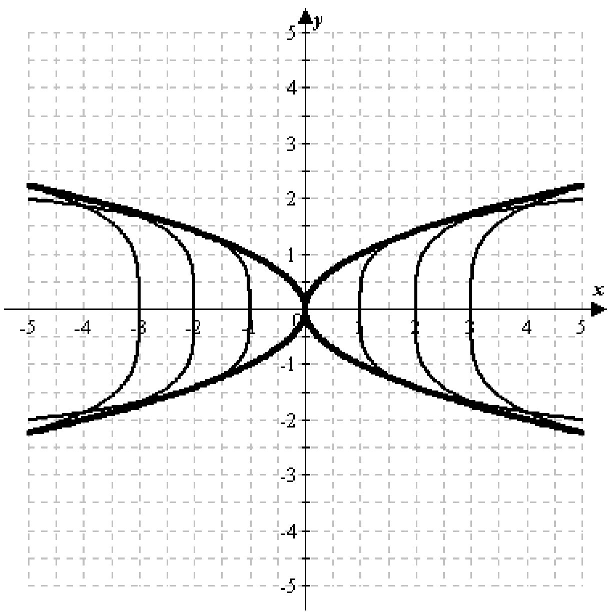
Решение. Замена $y' = p(y)$, $y'' = pp'$. Исходное уравнение примет вид: $yp' + 4p = 6y\sqrt{p}$ – уравнение Бернулли. Замена $z = \sqrt{p}$ приводит к уравнению $yz' + 2z = 3y$. Тогда $y^2 z' + 2yz = 3y^2$, $(y^2 z)' = (y^3)'$ и $z = y + \dfrac{C}{y^2}$. Так как $z(1) = 1$, то $C = 0$ и, следовательно, $z = y$.

Итак, относительно y получаем уравнение $y' = y^2$. Решая это уравнение, находим, что $y = \dfrac{1}{D-x}$. Так как $y(2) = 1$, то $D = 3$ и, следовательно, $y = \dfrac{1}{3-x}$.

5. (5) Решите уравнение, найдите особые решения и изобразите интегральные кривые на координатной плоскости.

$$4y^3 y'^2 - 4xy' + y = 0.$$

Ответ. $x = \dfrac{y^4}{4C} + C$; $x = \pm y^2$ – особые решения



Решение.

6. 4 Исследуйте на экстремум функционал

$$\int_1^4 \left(\frac{2yy'}{x} - (y')^2 - \frac{3y^2}{x^2} - \frac{y}{x} \right) dx, \qquad y(1) = y(4) = 4.$$

Ответ. $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{x}{4}$, максимум

Решение. Уравнение Эйлера: $2x^2y'' - 4y = x$.

Допустимая экстремаль: $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{x}{4}$.

Приращение функционала: $\triangle F = -\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2h^2}{x^2} + \left(\frac{h}{x} - h' \right)^2 \right) dx$

7. 3 Найдите положения равновесия системы. Определите характер найденных положений равновесия и изобразите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем в их окрестности.

$$\begin{cases} \dot{x} \,=\, \dfrac{1}{1+2y} - 1, \\ \dot{y} \,=\, \operatorname{sh} x - 3\sin y. \end{cases}$$

Ответ. $(0;0)$ – устойчивый узел

Решение. Единственное положение равновесия – точка $(0;0)$. Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{x} \,=\, -2y, \\ \dot{y} \,=\, x - 3y. \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $h_1 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$, $h_2 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$. Устойчивый узел.

8. 5 Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши.

$$xz^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2y(y - z^2) \frac{\partial u}{\partial y} - z^3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad z < 0; \qquad u\big|_{y=z} = x^2 e^z.$$

Ответ. $u = F(xz, ze^{-\frac{z^2}{2y}})$; $u = x^2 e^{\frac{z^2}{y}}$

Решение.

9. 5 Пусть $y(x,\alpha)$ – решение задачи Коши

$$y' = y + \sin y, \quad y(0) = \alpha.$$

Найдите $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$ и $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=0}$.

Ответ. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = e^{2x}$, $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=0} = 0$.

Решение. Пусть $y = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + o(\alpha^2)$. Тогда

$$y_0' = y_0 + \sin y_0, \quad y_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0.$$

$$y_1' = 2y_1, \quad y_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{2x}.$$

$$y_2' = 2y_2, \quad y_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.$$

1. (**3**) Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{V} + 8y''' + 16y' = 64e^{2x} + 8(1 + 2x).$$

Ответ. $y = C_1 + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x + C_4 x \sin 2x + C_5 x \cos 2x + \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{x^2 + x}{2}$

Решение.

2. (**4**) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - \sin 3t, \\ \dot{y} = -x + 2y - 2\sin 3t + 3\cos 3t. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + C_2 e^{3t} \left(\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} t + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \right) + \begin{Vmatrix} 0 \\ \sin 3t \end{Vmatrix}$

Решение.

3. (**4**) Найдите общее решение уравнения

$$x(x-4)y'' + (x^2 - 20)y' + 4(x-5)y = 5(x-4)^2$$

Ответ. $y = C_1 e^{-x} + \dfrac{C_2}{x^4} + x - 5$

Решение.

4. (**4**) Решите задачу Коши

$$x(y''y - (y')^2) = y^2 x - 4xy^2 e^{-\frac{y'}{xy}} + yy', \qquad y(1) = 2,\ y'(1) = 4\ln 2.$$

Ответ. $y = 2^{x^2}$

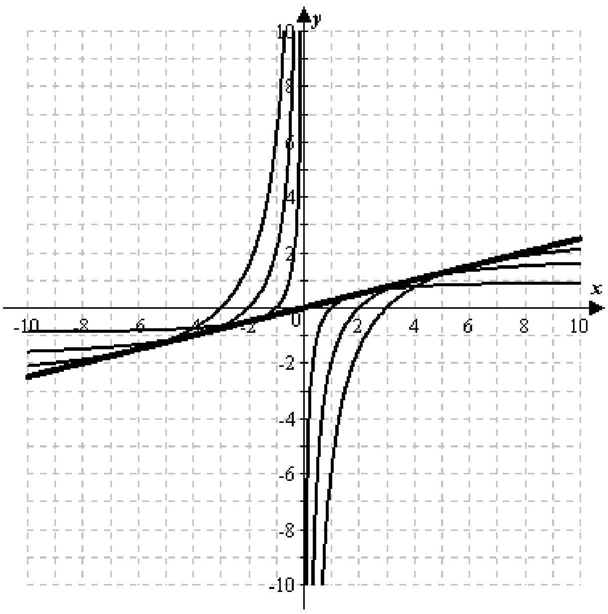
Решение. Замена $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$. Так как $y \neq 0$, то исходное уравнение примет вид $xz' = x - 4e^{-\frac{z}{x}} + \dfrac{z}{x}$ – однородное уравнение первого порядка. Замена $z = xu$, $z' = u + xu'$, приводит к уравнению $xu' = 1 - 4e^{-u}$. Функция $u \equiv \ln 4$ – решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u(1) = \ln 4$. Следовательно, $z = x\ln 4$.

Итак, относительно y получаем уравнение $\dfrac{y'}{y} = x\ln 4$. Решая это уравнение, находим, что $y = De^{x^2 \ln 2}$. Так как $y(1) = 2$, то $D = 1$ и, следовательно, $y = e^{x^2 \ln 2}$.

5. (**5**) Решите уравнение, найдите особые решения и изобразите интегральные кривые на координатной плоскости.

$$(y + xy')^2 = x^2 y'.$$

Ответ. $y = -\dfrac{C^2}{x} + C$; $y = \dfrac{x}{4}$ – особое решение



Решение.

6. **4** Исследуйте на экстремум функционал

$$\int_1^2 \left((y')^2 + \frac{4yy'}{x} + \frac{4y^2}{x^2} - 8y \right) dx, \qquad y(1) = 2,\ y(2) = 4\frac{1}{4}.$$

Ответ. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, минимум

Решение. Уравнение Эйлера: $x^2y'' - 6y = -4x^2$.

Допустимая экстремаль: $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Приращение функционала: $\triangle F = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2h}{x} + h'\right)^2 dx$

7. **3** Найдите положения равновесия системы. Определите характер найденных положений равновесия и изобразите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем в их окрестности.

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; \ln(1+2y), \\ \dot{y} \;=\; \arcsin(x-y). \end{cases}$$

Ответ. $(0;0)$ – седло

Решение. Единственное положение равновесия – точка $(0;0)$. Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dot{x} \;=\; 2y, \\ \dot{y} \;=\; x-y. \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ h_1 = \left\|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right\|,\ h_2 = \left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\|$. Седло.

8. **5** Найдите общее решение уравнения и решите задачу Коши.

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + (2z - e^y)\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad z > 0; \qquad u\big|_{y=\ln x} = \frac{(z-x)^2}{x^2}.$$

Ответ. $u = F\left(\dfrac{z-x}{xz}, z^2e^{-y} - z\right)$; $u = \dfrac{(z-x)(ze^{-y}-1)}{x}$

Решение.

9. **5** Пусть $y(x,\alpha,\beta)$ – решение задачи Коши

$$y'' = \alpha y - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta.$$

Найдите $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1,\beta=0}$ и $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right|_{\alpha=1,\beta=0}$.

Ответ. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1,\beta=0} = 1 - \cos x$, $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right|_{\alpha=1,\beta=0} = \sin x$.

Решение. Пусть $y = y_0 + (\alpha-1)y_1 + \beta y_2 + o\left(\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2}\right)$. Тогда

$$y_0'' = y_0 - y_0^2, \quad y_0(0) = 1,\ y_0'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1.$$

$$y_1'' = -y_1 + 1, \quad y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1 - \cos x.$$

$$y_2'' = -y_2, \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \sin x.$$