

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Курс 2 Семестр 4 2009 / 2010 уч. г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1 (4). Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 2z \\ \dot{y} = 5x - 7y + 3z, \quad (\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1). \\ \dot{z} = 6x - 9y + 4z \end{cases}$$

2 (6). Найти все действительные решения уравнения $y'' + 4y = 4\sin(2x) + 4\operatorname{tg}^2(2x)$.

3 (4). Найти положения равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -5x^2 - y + 7, \\ \dot{y} = 26x^2 - 2y - 22. \end{cases}$$
 Определить характер того из них, которое лежит в первой четверти, начертить на плоскости (x, y) фазовые траектории линеаризованной системы в его окрестности.

4 (4). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2(x-1)yy' - 2y' \cos(\pi x)) dx, \quad y(0) = 0.$$

5 (5). Найти все решения уравнения $12y(y')^4 = 4x(y')^5 + x^8, \quad x > 0$, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые.

6 (5). Найти все решения уравнения $x^2 y'' + (6x - x^2)y' + (6 - 3x)y = (3x + 6)e^x, \quad x > 0$.

7 (5). В области $x > 0$ найти все решения уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 + y^2 + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и решить задачу Коши $u = \frac{z - x^2 - x^4}{x}$ при $y = x^2$.

8 (5). Решить задачу Коши $2e^{2y} \cdot y'' + e^{2y} \cdot (y')^2 = 3(y')^4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = e$.

9 По определению, $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$, где A – произвольная числовая квадратная матрица порядка n . Пусть матрица A имеет n различных вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$.

- а) (2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\sin A$.
 б) (2) Вычислить $\det(\sin A)$.
-

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Курс 2 Семестр 4 2009 / 2010 уч. г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1 (4). Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \quad (\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 3). \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z \end{cases}$$

2 (6). Найти все действительные решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x} + \frac{e^x}{1+e^x}$.

3 (4). Найти положения равновесия системы $\begin{cases} \dot{x} = 20y^2 - 4x - 12, \\ \dot{y} = 4y^2 - x - 2. \end{cases}$ Определить характер того из них, которое лежит в первой четверти, и начертить на плоскости (x,y) фазовые траектории линеаризованной системы в его окрестности.

4 (4). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал $J(y) = \int_0^1 \left((y')^2 + 2y^2 + 4xyy' - 2y \cos(\pi x) \right) dx, \quad y(1) = -\frac{1}{\pi^2}$.

5 (5). Найти все решения уравнения $18y(y')^6 = 6x(y')^7 + x^{12}, \quad x > 0$, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые.

6 (5). Найти все решения уравнения $xy'' + (2-4x)y' + (4x-4)y = 4, \quad x > 0$.

7 (5). В области $x > 0$ найти все решения уравнения $x \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y - z) \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и решить задачу Коши $u = -\frac{y}{x}$ при $z = -2x^2$.

8 (5). Решить задачу Коши $\sin^2 y \cdot \cos y \cdot y'' + \sin^3 y \cdot (y')^2 = (y')^3, \quad y(0) = \frac{\pi}{3}, \quad y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 По определению, $\text{sh } A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A})$, где A – произвольная числовая квадратная матрица порядка n .

Пусть матрица A имеет n различных вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$.

а) (2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\text{sh } A$.

б) (2) Вычислить $\det(\text{sh } A)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Курс 2 Семестр 4 2009 / 2010 уч. г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1 (4). Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 9z \\ \dot{y} = x + 3y - 5z \\ \dot{z} = x + 2y - 4z \end{cases}, (\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1).$$

2 (6). Найти все действительные решения уравнения $y'' + 9y = 18\cos(3x) + 9\text{ctg}^2(3x)$.

3 (4). Найти положения равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 + y - 7, \\ \dot{y} = -20x^2 + 4y + 8. \end{cases}$$
 Определить характер того из них, которое лежит в первой четверти, и начертить на плоскости (x, y) фазовые траектории линеаризованной системы в его окрестности.

4 (4). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал
$$J(y) = \int_0^1 ((y')^2 + 2y^2 + 4(x-1)yy' + 2y \sin(\pi x)) dx, y(0) = 0.$$

5 (5). Найти все решения уравнения $20y(y')^4 = 4x(y')^5 + x^{16}, x > 0$, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые.

6 (5). Найти все решения уравнения $x^2 y'' + (4x - x^2)y' + 2(1-x)y = 2(x+1)e^x, x > 0$.

7 (5). В области $x > 0, z > 0$ найти все решения уравнения $z \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x^2 + z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и решить задачу Коши $u = \frac{y}{3x} + x$ при $z = 2x$.

8 (5). Решить задачу Коши $y'' - (y')^2 + 2e^{2y} \cdot (y')^4 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{e}$.

9 По определению, $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$, где A – произвольная числовая квадратная матрица порядка n . Пусть матрица A имеет n различных вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$.

а) (2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\cos A$.

б) (2) Вычислить $\det(\cos A)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Дифференциальные уравнения

Курс 2 Семестр 4 2009 / 2010 уч. г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1 (4). Найти все действительные решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z \\ \dot{y} = 5x - y + 4z, \quad (\lambda_{1,2} = -2, \lambda_3 = 3). \\ \dot{z} = 5x + y + 2z \end{cases}$$

2 (6). Найти все действительные решения уравнения $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x} + \frac{e^{2x}}{1 - e^x}$.

3 (4). Найти положения равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 10y^2 + 6x - 28, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 4. \end{cases}$$
 Определить характер того из них, которое лежит в первой четверти, и начертить на плоскости (x, y) фазовые траектории линеаризованной системы в его окрестности.

4 (4). Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал.

$$J(y) = \int_0^1 \left((y')^2 + y^2 + 2xyy' - 2y' \cos(\pi x) \right) dx, \quad y(1) = 0$$

5 (5). Найти все решения уравнения $30y(y')^6 = 6x(y')^7 + x^{24}$, $x > 0$, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые.

6 (5). Найти все решения уравнения $xy'' + (2x + 2)y' + (x + 2)y = 1$, $x > 0$.

7 (5). В области $x > 0, y > 0$ найти все решения уравнения $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + (y^2 - z - x^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и решить задачу Коши $u = 3x - \frac{z}{x}$ при $y = 2x$.

8 (5). Решить задачу Коши $\cos^2 y \cdot \sin y \cdot y'' - \cos^3 y \cdot (y')^2 + (y')^3 = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{6}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9 По определению, $\operatorname{ch} A = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A})$, где A – произвольная числовая квадратная матрица порядка n .

Пусть матрица A имеет n различных вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$.

а) (2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\operatorname{ch} A$.

б) (2) Вычислить $\det(\operatorname{ch} A)$.
