ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **А** **Курс** **3** **Факультеты** **Для всех факультетов** **2019/2020 уч.г.**

Ф.И.О. студента ________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов			**Оценка**	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1. (10) Решить задачу Коши в наибольшей области, где решение существует и единственно; указать эту область: $8xu_{xx} - 6\sqrt{x}u_{xy} + u_{yy} + 4u_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0;$

$$u|_{y=0} = \frac{x}{2}, \qquad u_y|_{y=0} = 0, \qquad x > 0.$$

---

2. (10) Решить смешанную задачу для полуоси: $u_{tt} = u_{xx} + 8\dfrac{x-t}{1+x+t}, \qquad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 2, \quad u_t|_{t=0} = \frac{-2}{1+x}, \qquad x > 0;$$
$$u_x|_{x=0} = 2t + 2t\ln(1+t), \qquad t > 0.$$

---

3. (10) Решить начально-краевую задачу: $u_t = 18u_{xx} + x + \pi(x - 3\pi)e^{-t/2}, \quad 0 < x < 3\pi, \ t > 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=3\pi} = 3\pi t, \quad t \geqslant 0.$$

---

4. (10) Методом Фурье решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = \frac{4x}{x^2+y^2}, \qquad 1 < r < e = \exp(1), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$u_r|_{r=1} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad u|_{r=e} = 2x.$$

Ответ дать в декартовых координатах.

---

5. (10) Решить задачу Коши: $3u_{tt} = \Delta u + 72\cos(x + y + 5z)\sin t, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \operatorname{sh}(x^2 + y^2 + z^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$u_t|_{t=0} = xy^3, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

---

6. (10) Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора и оператора, союзного с ним, а при всех допустимых значениях λ решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y + x\sin y)\varphi(y)\,dy + x + 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

---

7. (10) Найти решение смешанной задачи для круга:

$$u_{tt} = \Delta u + t \cdot J_2(\mu_2^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_2'(\nu_2^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$|u(t,0)| < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где $\mu_2^{(2)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_2(r)$,
$\nu_2^{(2)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_2'(r)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина | Уравнения математической физики |

Вариант | В | **Курс** | 3 | **Факультеты** | Для всех факультетов | **2019/2020 уч.г.**

Ф.И.О. студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. 10 Решить задачу Коши в наибольшей области, где решение существует и единственно; указать эту область: $6x^2u_{xx} + 7xu_{xy} - 3u_{yy} + 6xu_x = 0, \quad x > 1;$
$u|_{x=1} = 8y, \qquad u_x|_{x=1} = -1.$

---

2. 10 Решить смешанную задачу для полуоси: $u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{4}{1+x+t}, \qquad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2x^2}{1+x}, \qquad x > 0;$$
$$u_x|_{x=0} = t - \ln(1+t), \qquad t > 0.$$

---

3. 10 Решить начально-краевую задачу: $u_t = 4u_{xx} + 9\pi(x - \pi/3)e^{-9t}, \quad 0 < x < \pi/3, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$
$u_x|_{x=0} = \pi, \quad u|_{x=\pi/3} = \pi^2/3, \quad t \geqslant 0.$

---

4. 10 Методом Фурье решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 4\frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad 1 < r < e = \exp(1), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$
$$u_r|_{r=1} = 2\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad u|_{r=e} = 2(x+y).$$

Ответ дать в декартовых координатах.

---

5. 10 Решить задачу Коши: $2u_t = \Delta u + 2e^{t+3x+3y}\sin 4z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = e^{-x} + y^2 + \sin z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

---

6. 10 Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора и оператора, союзного с ним, а при всех допустимых значениях λ решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (3xy^2 - 2y\cos x)\varphi(y)\,dy + \pi x - 2, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

---

7. 10 Найти решение смешанной задачи для круга:

$$u_t = 9\Delta u - u, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos\varphi, \quad r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$|u(t,0)| < \infty, \quad u|_{r=2} = 2t\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где $\mu_3^{(2)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_2(r)$.

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С приложением согласен ______________________ Подпись студента

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Вариант C **Курс** 3 **Факультеты** Для всех факультетов **2019/2020 уч.г.**

Ф.И.О. студента ____________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (10) Решить задачу Коши в наибольшей области, где решение существует и единственно; указать эту область: $2xu_{xx} + 3x^2u_{xy} - 2x^3u_{yy} - 2u_x = 0, \quad y > 0;$

$$u|_{y=0} = 0, \qquad u_y|_{y=0} = 10x^2.$$

---

2. (10) Решить смешанную задачу для полуоси: $u_{tt} = u_{xx} + 8\dfrac{x-t}{1+x+t}, \qquad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = -1, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2x}{1+x}, \qquad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = 2t + 2t\ln(1+t), \qquad t > 0.$$

---

3. (10) Решить начально-краевую задачу: $u_t = 12u_{xx} + \pi + \pi x e^{-t/3}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi;$$

$$u|_{x=0} = \pi t, \quad u_x|_{x=3\pi} = 0, \quad t \geqslant 0.$$

---

4. (10) Методом Фурье решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = \frac{4y}{x^2+y^2}, \qquad 1 < r < e = \exp(1), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$u_r|_{r=1} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad u|_{r=e} = 2y.$$

Ответ дать в декартовых координатах.

---

5. (10) Решить задачу Коши: $3u_{tt} = \Delta u + 36\cos(x+y+5z)\sin 3t, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \operatorname{sh}(z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u_t|_{t=0} = xy^3, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

---

6. (10) Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора и оператора, союзного с ним, а при всех допустимых значениях λ решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y + x^3)\varphi(y)\,dy + 4\cos x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

---

7. (10) Найти решение смешанной задачи для круга:

$$u_{tt} = \Delta u + e^t \cdot J_2'(\nu_1^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2}J_2(\mu_1^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$|u(t,0)| < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где $\mu_1^{(2)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_2(r)$,
$\nu_1^{(2)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_2'(r)$.

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С приложением согласен ____________________ Подпись студента

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **D** **Курс** **3** **Факультеты** **Для всех факультетов** **2019/2020 уч.г.**

Ф.И.О. студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (10) Решить задачу Коши в наибольшей области, где решение существует и единственно; указать эту область: $u_{xx} - 3x^2 u_{xy} + 2x^4 u_{yy} - \dfrac{2}{x} u_x = 0, \qquad x > 1;$

$$u|_{x=1} = 7y + 2, \qquad u_x|_{x=1} = 6.$$

---

2. (10) Решить смешанную задачу для полуоси: $u_{tt} = u_{xx} + \dfrac{4}{1+x+t}, \qquad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = -2, \quad u_t|_{t=0} = \frac{2}{1+x}, \qquad x > 0;$$

$$u_x|_{x=0} = -t - \ln(1+t), \qquad t > 0.$$

---

3. (10) Решить начально-краевую задачу: $u_t = 8u_{xx} + 1 + 9\pi x e^{-18t}, \quad 0 < x < \pi/3, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$$

$$u|_{x=0} = tt, \quad u|_{x=\pi/3} = 0, \quad t \geqslant 0.$$

---

4. (10) Методом Фурье решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 4\frac{x-y}{x^2+y^2}, \qquad 1 < r < e = \exp(1), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$u_r|_{r=1} = 2\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad u|_{r=e} = 2(x-y).$$

Ответ дать в декартовых координатах.

---

5. (10) Решить задачу Коши: $2u_t = \Delta u + 2e^{t+3x}\sin 3z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = e^{-x^2} + y^2 + \sin z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

---

6. (10) Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора и оператора, союзного с ним, а при всех допустимых значениях λ решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y + x \sin y)\varphi(y)\,dy + 12x + \pi^2, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

---

7. (10) Найти решение смешанной задачи для круга:

$$u_t = 9\Delta u - 2u, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{2} r\right)\sin\varphi, \quad r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$|u(t,0)| < \infty, \quad u|_{r=2} = 4t\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t \geqslant 0,$$

где $\mu_1^{(1)}$ — положительный корень функции Бесселя $J_1(r)$.

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С приложением согласен ____________________ Подпись студента