Вариант 81

1. ③ $y'\Big|_A = -1; \quad y''\Big|_A = -\dfrac{6}{5}, \quad k(A) = \dfrac{3}{5\sqrt{2}}.$

2. ③ $$y^{(n)} = (x^2+2x+3)\cdot 4^n \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(4x+3)^n} + n\cdot(2x+2)\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(4x+3)^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 4^{n-2}\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(4x+3)^{n-2}}.$$

3. ⑤ $t = x-4$, $y(t) = (t^2-5)\cos 2t$, $y(t) = -5 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}4^{k-1}}{(2k)!}\left[2k(2k-1)+20\right] t^{2k} + o(t^{2n+1}).$

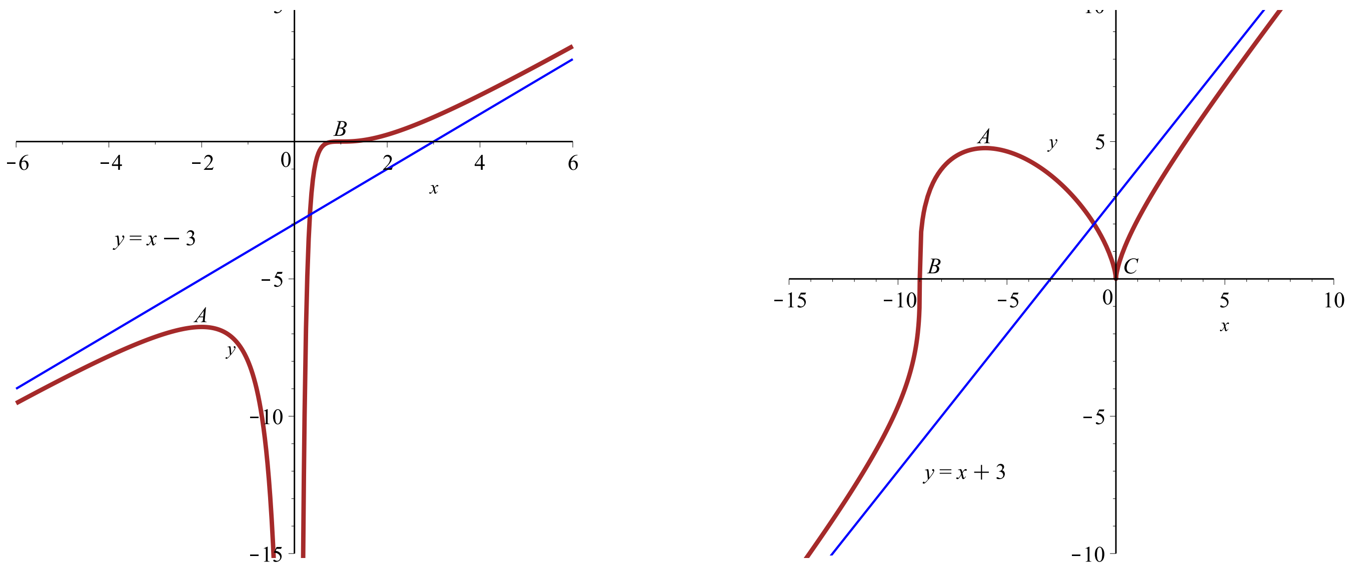

Рис. к № 4 и № 5

4. ④ Асимптоты: $y = x - 3$, $x = 0$;
$y' = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, $y'' = \dfrac{6(x-1)}{x^4}$;
$A\left(-2,\, -\dfrac{27}{4}\right)$ — точка локального максимума; $B(1,\, 0)$ — точка перегиба.

5. ⑥ Асимптота: $y = x + 3$;
$y' = \dfrac{x+6}{\sqrt[3]{x(x+9)^2}}$; $y'' = -\dfrac{18}{\sqrt[3]{x^4(x+9)^5}}$;
$A(-6,\, 3 \cdot \sqrt[3]{4})$ — точка локального максимума; $C(0,\, 0)$ — точки локального минимума с вертикальной касательной; $B(-9,\, 0)$ — точка перегиба с вертикальной касательной.

6. ④ Числитель: $\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$; знаменатель: $\dfrac{2}{3}\, x^3 + o(x^3)$. Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

7. ⑥ Показатель степени: $\dfrac{1}{-\dfrac{x^4}{4} + o(x^4)}$; основание степени: $1 - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$. Ответ: $e^{2/3}$.

8. ⑥ Пусть $x'_n = e^{2\pi n}$ и $x''_n = \exp(2\pi n + e^{-4\pi n})$, тогда при $n \to \infty$ верно $|x'_n - x''_n| \sim e^{-2\pi n} \to 0$;
т. е. для любого $\delta > 0$ найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0 \mapsto |x'_n - x''_n| < \delta$;
при $n \to \infty$ выполнено $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |(x''_n)^2 \sin(2\pi n + e^{-4\pi n})| = \exp(4\pi n + 2e^{-4\pi n}) \sin e^{-4\pi n} \sim 1$;
т. е. существует такое число $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_1$ выполняется $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant 1/2$.
Справедливо: $\exists\, \varepsilon_0 = 1/2 \,:\, \forall \delta > 0 \;\; \exists\, n = \max\{n_0,\, n_1\} \;\&\; \exists\, x'_n,\, x''_n \in E \,:\, |x'_n - x''_n| < \delta \;:$
$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$. Функция $y = x^2 \sin \ln x$ не является равномерно непрерывной на E.