Вариант 81

1 а). ③ $\dfrac{2(x^2+9x+6)}{(x-3)(x^2+4x+7)} = \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{x-3}{x^2+4x+7}$;

$$\int \frac{2(x^2+9x+6)}{(x-3)(x^2+4x+7)}\,dx = 3\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+7) + \frac{5}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$$

1 б). ② Замена $x = t^6$;

$$\int \frac{\ln(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx = 6\int \ln(1-t^2)\,dt = 6\sqrt[6]{x}\ln(1-\sqrt[3]{x}) - 12\sqrt[6]{x} + 6\ln\frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}} + C.$$

2. ④ $df(M) = 2\,dx + \dfrac{dy}{e}$, $d^2f(M) = -\dfrac{8}{e}\,dx\,dy - \dfrac{dy^2}{e^2}$;

$$f(x,\,y) = 1 + 2(x-1) + \frac{1}{e}(y-1) + \frac{1}{2}\Big[-\frac{8}{e}(x-1)(y-1) - \frac{1}{e^2}(y-1)^2\Big] + o\big((x-1)^2+(y-1)^2\big).$$

3. ② $V = \pi \displaystyle\int\limits_{(\pi/6)^2}^{(\pi/2)^2} \frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.$

4. ④ $f_x(0,\,0) = f_y(0,\,0) = 0$; $x^4 + y^4 - \dfrac{1}{3}\,x^2y^2 \geqslant \dfrac{5}{12}\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^4$;

$|F(x,\,y)| = \left|\dfrac{f(x,\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant C_0\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{1/3}$;

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{C_0}\right)^3 > 0 \quad \forall(x,\,y)\ :\ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \to \quad |F(x,\,y)| < \varepsilon$ — функция дифференцируема в точке $(0,\,0)$.

5. ③ $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$; $I = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$;

I_1: при $x \to 0$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C_1}{x^{-4\alpha-1}}$; поэтому I_1 сходится при $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

I_2: при $x \to +\infty$ выполняется $f(x) \sim \dfrac{C_2}{x^{1-2\alpha}}$; поэтому I_2 сходится при $\alpha < 0$.

Интеграл I сходится при $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{2},\,0\right)$.

6. ② $\sqrt[n]{a_n} \sim \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1/3} < 1$; ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

7 а). ④ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in E_1 \cup E_2$; $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x^2}{2}\left|1 - \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)}{x^2/2n}\right|$;

<u>На E_1:</u> пусть $t = x/\sqrt{n}$, (формула Тейлора) $\left|1 - \dfrac{t - \ln(1+t)}{t^2/2}\right| = \dfrac{4t}{3(1+\xi)^3}$, где $0 < \xi < \dfrac{x}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$; $g_n(x) \leqslant \dfrac{4}{3\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$, на E_1 есть равномерная сходимость.

<u>На E_2:</u> пусть $x_n = \sqrt{n} \in E_2$ при $n > 1$, тогда $g_n(x_n) = \dfrac{n(2\ln 2 - 1)}{2} \geqslant \dfrac{2\ln 2 - 1}{2} = \varepsilon_0 > 0$, на E_2 нет равномерной сходимости.

7 б). ③ $f_n(x_0) \leqslant \dfrac{1}{x_0^{3/2} n^{3/2}}$, из интегрального признака и признака сравнения следует поточечная сходимость на $E_1 \cup E_2$.

<u>На E_2:</u> $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$, из интегрального признака и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость на E_2.

<u>На E_1:</u> $x_n = \dfrac{1}{n} \in E_1$, $n > 1$; $f_n(x_n) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \not\to 0$ при $n \to \infty$, на E_1 нет равномерной сходимости.

8. ③ $f(x) = x^2 \cdot g(x)$, $g'(x) = -2(1-4x^2)^{-1/2}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\, x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} C_{-1/2}^{k} \cdot 2^{2k+1}}{2k+1}\, x^{2k+3},\ R = 1/2.$$

9. ③ **а)**. $I_1 = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{2/3}}\, dx$; $I_2 = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{2/3}}\, dx$; $I_3 = \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{4/3}}\, dx$.

Сходимость и абсолютная сходимость интегралов вида $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx$, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, dx$, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\, dx$ и $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{\alpha}}\, dx$ предполагаются известными для студентов. Проводить исследование не нужно.

б). $\Delta_n = \left[n,\, n + \dfrac{1}{n^4}\right]$; $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$; $f(x) = \begin{cases} n^2, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Delta; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Delta; \end{cases}$

$I_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $I_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$; $I_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.