ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математическй физики**

Вариант: 181 Курс: 3 Факультет: ФОПФ 2017–2018 уч. г.

---

1. (4) В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}[\varphi(x,y)](\xi,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\zeta)}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Найти в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ обобщённое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}\left[\frac{xy}{x+y+i}\right](\xi,\zeta).$$

Ответ:

$$\mathcal{F}\left[\frac{xy}{x+y+i}\right](\xi,\zeta) = 4\pi^2 i\,\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(\delta(\xi-\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta}\right).$$

Решение:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{xy}{x+y+i}\right](\xi,\zeta) = -\tfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\,\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{x+y+i}\right](\xi,\zeta).$$

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{x+y+i}\right](\xi,\zeta), \varphi(\xi,\zeta)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \tfrac{dx\,dy}{x+y+i} \int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{ix\xi+iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} dx \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi} \int\limits_{-R}^{R} \tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{x+y+i} \boxed{=}$$

Так как справедливы соотношения

$$\int\limits_{-R}^{R} \tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{x+y+i} \to -2\pi i\,\theta(-\zeta)\,e^{-ix\zeta+\zeta} \quad \text{при} \quad R\to+\infty,$$

$$\left|\int\limits_{-R}^{R} \tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{x+y+i}\right| \le 2\pi + \tfrac{\pi R}{R-|x|-1} \le 4\pi \quad \text{при} \quad R > 2(|x|+1),$$

$$\left|\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi} \int\limits_{-R}^{R} \tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{x+y+i}\right| \le 4\pi|\varphi(\xi,\zeta)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2),$$

то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=} \int\limits_{\mathbb{R}} dx \int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi}\left(-2\pi i\,\theta(-\zeta)\,e^{-ix\zeta+\zeta}\right) =$$

$$= (-2\pi i) \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta} \int\limits_{-R}^{R} dx\,e^{ix(\xi-\zeta)} =$$

$$= (-4\pi i) \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta}\,\tfrac{\sin R(\xi-\zeta)}{(\xi-\zeta)} =$$

$$= (-4\pi i) \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dz \left(\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,\varphi(z+\zeta,\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta}\right) \tfrac{\sin Rz}{z} =$$

$$= (-4\pi^2 i) \int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,\varphi(\zeta,\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta} = \left\langle (-4\pi^2 i)\delta(\xi-\zeta)\theta(-\zeta)e^{\zeta}, \varphi(\xi,\zeta)\right\rangle.$$

2. (4) В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ доказать, что существует свёртка

$$\big(\theta(x-y)\big) * \big(\delta(x+y)\theta(x)\big),$$

и вычислить её.

Ответ:

$$\big(\theta(x-y)\big) * \big(\delta(x+y)\theta(x)\big) = \theta(x-y)\,\frac{(x-y)}{2}.$$

Решение: Для любой 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем:

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(x-y), \eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right) \langle \delta(\xi+\zeta)\theta(\xi), \varphi(\xi+x,\zeta+y)\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{x-y>0} dx\,dy\,\eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right) \int\limits_0^{+\infty} d\xi\,\varphi(\xi+x,y-\xi) \boxed{=}$$

Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ существует $C>0$:

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \tfrac{C}{(1+(\alpha-\beta)^2)^3(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Тогда для $\alpha = x+\xi$ и $\beta = y-\xi$ при $x-y>0$ и $\xi>0$ имеем $\alpha-\beta = x-y+2\xi > 2\xi > 0$, поэтому

$$|\varphi(\xi+x,y-\xi)| \le \tfrac{C}{(1+4\xi^2)^3(1+(x+\xi)^2)(1+(y-\xi)^2)}.$$

Заметим, что

$$(1+4\xi^2)(1+(x+\xi)^2) \ge \left\{ \begin{array}{ll} \left(1+\frac{x^2}{4}\right), & \frac{|x|}{2} \ge \xi, \\ (1+x^2), & \frac{|x|}{2} \le \xi, \end{array} \right\} \ge \left(1+\tfrac{x^2}{4}\right),$$

$$(1+4\xi^2)(1+(y-\xi)^2) \ge \left\{ \begin{array}{ll} \left(1+\frac{y^2}{4}\right), & \frac{|y|}{2} \ge \xi, \\ (1+y^2), & \frac{|y|}{2} \le \xi, \end{array} \right\} \ge \left(1+\tfrac{y^2}{4}\right),$$

Так как существует $M>0$, такое, что $|\eta(x,y)| \le M$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y \in R$, то при $x-y>0$ и $\xi>0$ получаем:

$$\left|\eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right)\varphi(\xi+x,y-\xi)\right| \le \tfrac{MC}{(1+4\xi^2)\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3).$$

При этом $\eta\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right) \to 1$ при $R\to+\infty$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y\in\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, находим:

$$\boxed{=} \int\limits_{x-y>0} dx\,dy \int\limits_0^{+\infty} d\xi\,\varphi(\xi+x,y-\xi) = \int\limits_0^{+\infty} d\xi \int\limits_{x-y>0} dx\,dy\,\varphi(\xi+x,y-\xi) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\xi \int\limits_{\alpha-\beta>2\xi} d\alpha\,d\beta\,\varphi(\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha-\beta>0} d\alpha\,d\beta\,\varphi(\alpha,\beta) \int\limits_0^{\frac{\alpha-\beta}{2}} d\xi = \left\langle \theta(\alpha-\beta)\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \varphi(\alpha,\beta)\right\rangle.$$

3. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$L = i\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\right)^2 + i.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$Lu(t,x) = \frac{\delta(x)\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

Для справки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(it^2)\,dt = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\mathcal{E}(t,x) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-t+ix+i\frac{x^2}{4t}\right)$, $u(t,x) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi}}e^{ix-t}\int\limits_0^t \frac{\exp\left(\xi+i\frac{x^2}{4(t-\xi)}\right)}{\sqrt{\xi(t-\xi)}}\,d\xi$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ равносильно $P_L(\tau,\xi)\mathcal{F}[\mathcal{E}(t,x)](\tau,\xi) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi) = i(-i\tau) + (-i\xi - i)^2 + i = \tau - (\xi+1)^2 + i, \quad |P_L(\tau,\xi)| \geq 1 \quad \forall\,\tau \in \mathbb{R}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi)}\right](t,x).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ преобразование Фурье по переменной x, получаем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - (\xi+1)^2 + i\right)\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = \delta(t),$$

откуда получаем

$$\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = -i\theta(t)\exp\left(-t - it(\xi+1)^2\right).$$

Следовательно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ находим

$$\langle \mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \left\langle \mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi), \mathcal{F}_x^{-1}[\varphi(t,x)](\xi)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,(-i)\,e^{-t-it(\xi+1)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} dx\,e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x) =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{-t+ix}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,e^{-it\zeta^2 - ix\zeta} =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{-t+ix+i\frac{x^2}{4t}}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,e^{-i\left(\sqrt{t}\zeta + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{-t+ix+i\frac{x^2}{4t}}\,\frac{\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t}}\,e^{-t+ix+i\frac{x^2}{4t}} = \left\langle -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi t}}\,\theta(t)\,e^{-t+ix+i\frac{x^2}{4t}}, \varphi(t,x)\right\rangle$$

в) Решением является свёртка $u(t,x) = \frac{\delta(x)\theta(t)}{\sqrt{t}} * \mathcal{E}(t,x)$. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\langle u(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}\,\eta\left(\tfrac{t}{R},0\right) \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}}\right) e^{-\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}\,\varphi(t+\tau,\xi) \boxed{=}$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то существует $C>0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \frac{C}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\beta\in\mathbb{R}.$$

Далее, существует $M>0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta)| \le M$. Тогда для $t>0$, $\tau>0$, $\xi\in\mathbb{R}$ получаем

$$\left|\frac{\eta(t/R,0)\varphi(t+\tau,\xi)e^{-\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}}{\sqrt{t\tau}}\right| \le \frac{M\,C\,e^{-\tau}}{(1+t^2)(1+\xi^2)\sqrt{t\tau}} \in \mathbb{L}_1\,(t>0,\tau>0,\xi\in\mathbb{R})\,.$$

Так как $\eta(t/R,0) \to 1$ при $R\to+\infty$, то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\tfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}}\right) e^{-\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}\,\varphi(t+\tau,\xi) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_t^{+\infty} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\tfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(\zeta-t)}}\right) e^{-\zeta+t+i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}\,\varphi(\zeta,\xi) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,\varphi(\zeta,\xi) \int\limits_0^{\zeta} dt \left(-\tfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi t(\zeta-t)}}\right) e^{-\zeta+t+i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} =$$

$$= \left\langle \left(-\tfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right)\theta(\zeta)e^{i\xi-\zeta} \int\limits_0^{\zeta} \frac{e^{t+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}}{\sqrt{t(\zeta-t)}}\,dt\,, \varphi(\zeta,\xi)\right\rangle.$$

---

4. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ рассматривается оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} + 1.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$Lu(x,y,z) = \theta(x-z)\delta(y+z).$$

Ответ: $\mathcal{E}(x,y,z) = e^{-x}\theta(x)\delta(y+x)\delta(z+x)$, $u(x,y,z) = \frac{\theta(x+y)\theta(-y-z)}{2}\exp\left(\frac{y+z}{2}\right)$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ равносильно $P_L(\tau,\xi,\zeta)\mathcal{F}[\mathcal{E}(x,y,z)](\tau,\xi,\zeta) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi,\zeta) = -i\tau + i\xi + i\zeta + 1, \quad |P_L(\tau,\xi,\zeta)| \ge 1 \quad \forall\,\tau\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R},\ \zeta\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi,\zeta)}\right](x,y,z).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ преобразование Фурье по y и z, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i(\xi+\zeta) + 1\right) F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta) = \delta(x).$$

Следовательно,

$$F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta) = e^{-x-ix(\xi+\zeta)}\theta(x).$$

Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\langle \mathcal{E}(x,y,z), \varphi(x,y,z)\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z)](\xi,\zeta), \mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dx\, e^{-x} \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{-ix\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{-ix\zeta}\, \mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dx\, e^{-x}\, \mathcal{F}_{\xi,\zeta}\left[\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right](-x,-x) = \int\limits_0^{+\infty} dx\, e^{-x}\, \varphi(x,-x,-x) =$$

$$= \left\langle e^{-x}\theta(x)\delta(y+x)\delta(z+x), \varphi(x,y,z)\right\rangle.$$

в) Решением уравнения является функция

$$u(x,y,z) = \big(\theta(x-z)\delta(y+z)\big) * \mathcal{E}(x,y,z) = \big(\theta(x-z)\delta(y+z)\big) * \left(e^{-x}\theta(x)\delta(y+x)\delta(z+x)\right).$$

Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем:

$$\langle u(x,y,z), \varphi(x,y,z)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{x-z>0} dx\, dz\, \eta\left(\tfrac{x}{R}, -\tfrac{z}{R}, \tfrac{z}{R}\right) \int\limits_0^{+\infty} d\xi\, e^{-\xi}\, \varphi(x+\xi, -z-\xi, z-\xi) \boxed{=}$$

В силу вложения $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta,\gamma)| \le \frac{C}{(1+(\alpha+\beta)^2)(1+(\beta-\gamma)^2)} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Далее, существует $M > 0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta,\gamma)| \le M$. Следовательно,

$$\left|\eta\left(\tfrac{x}{R}, -\tfrac{z}{R}, \tfrac{z}{R}\right) e^{-\xi}\, \varphi(x+\xi, -z-\xi, z-\xi)\right| \le \frac{M\, C\, e^{-\xi}}{(1+(x-z)^2)(1+4z^2)} \in \mathbb{L}_1(x-z>0, z\in\mathbb{R}, \xi>0)$$

Так как $\eta\left(\tfrac{x}{R}, -\tfrac{z}{R}, \tfrac{z}{R}\right) \to 1$ при $R \to +\infty$, то, по теореме Лебега, получаем:

$$\boxed{=} \int\limits_{x-z>0} dx\, dz \int\limits_0^{+\infty} d\xi\, e^{-\xi}\, \varphi(x+\xi, -z-\xi, z-\xi) \boxed{=}$$

Сделав замену переменных интегрирования

$$\alpha = x+\xi, \quad \beta = -z-\xi, \quad \gamma = z-\xi,$$

получаем

$$x - z = \alpha + \beta > 0, \quad \xi = -\frac{\beta+\gamma}{2} > 0, \quad \left|\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,y,z)}\right| = 2,$$

откуда находим, что

$$\boxed{=} \int\limits_{\substack{\alpha+\beta>0\\ \beta+\gamma<0}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \frac{\exp\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{2}\, \varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \left\langle \frac{\theta(x+y)\theta(-y-z)}{2} \exp\left(\frac{y+z}{2}\right), \varphi(x,y,z) \right\rangle.$$

---

5. 6 Рассматривается линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,2] \to \mathbb{L}_2[0,2]$ вида

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x t(x-1)f(t)\,dt + \int\limits_x^2 x(t-1)f(t)\,dt, \quad x \in [0,2], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,2].$$

а) 1 Доказать, что оператор A компактен, самосопряжён и взаимно однозначен;

б) 2 Найти спектральное разложение оператора A;

в) 1 Найти область определения и спектральное разложение оператора $T = \cos(A^{-1})$;

г) 2 Выяснить, для каких функций $v \in \mathbb{L}_2[0,2]$ задача

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t) = Tu(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D(T), \quad u(0) = v.$$

имеет решение $u(t)$. Найти это решение.

Ответ: а) $\operatorname{Ker} A = \big(\operatorname{Im} A\big)^{\perp} \subset \Big(A\big(C[0,2]\big)\Big)^{\perp} = \{0\}$, так как

$A\big(C[0,2]\big) = \{\ g \in C^2[0,2]\ :\ g(0) = 0,\ \ g'(2) = g(2)\ \}$ — всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,2]$.

б) $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$, где

$\lambda_0 > 0$ — единственное решение уравнение $\operatorname{th} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,

$\lambda_n < 0$ при $n \in \mathbb{N}$ — решения уравнения $\operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$,

P_0 — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\lambda_0}}\right)$,

P_n при $n \in \mathbb{N}$ — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\sin \frac{x}{\sqrt{-\lambda_n}}\right)$;

в) $D(T) = \mathbb{L}_2[0,2], \quad T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\lambda_n}\right) P_n$;

г) Для любой функции $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,2]$ существует решение

$u(t) = \exp(-itT)v = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-it\cos\frac{1}{\lambda_n}\right) P_n v.$

Решение: а) Оператор A является интегральным оператором вида

$$(Af)(x) = \int\limits_0^2 K(t,x)\, f(t)\,dt, \quad f \in \mathbb{L}_2[0,2], \quad x \in [0,2],$$

где функция $K(t,x) \in C\big([0,2]\times[0,2]\big)$ имеет вид

$$K(t,x) = \begin{cases} t(x-1), & 0 \le t \le x \le 2, \\ x(t-1), & 0 \le x \le t \le 2. \end{cases}$$

Следовательно, оператор A является компактным. Далее, функция $K(t,x)$ имеет вещественные значения и симметрична: $K(t,x) = K(x,t)$ для всех $t, x \in [0,2]$. Следовательно, оператор A является самосопряжённым. Далее, докажем, что $\operatorname{Im} A$ всюду плотен в $\mathbb{L}_2[0,2]$. Тогда $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0\}$, то есть оператор A инъективен. Действительно, $\operatorname{Im} A \supset A\big(C[0,2]\big)$. Так как очевидно вложение $A\big(C[0,2]\big) \subset C^1[0,2]$, то для функции $f \in C[0,2]$ равенство $g = Af$ равносильно

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \int\limits_0^x t\, f(t)\, dt + \int\limits_x^2 (t-1)\, f(t)\, dt, \quad x \in [0,2].$$

Следовательно, $g \in C^2[0,2]$, и выполнены равенства

$$g'(2) = g(2) = \int\limits_0^2 t f(t)\, dt, \quad g''(x) = f(x), \quad x \in [0,2].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$A\big(C[0,2]\big) = \big\{\ g \in C^2[0,2]\ :\ g(0) = 0,\ \ g'(2) = g(2)\ \big\}$$

то есть множество $A\big(C[0,2]\big)$ всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,2]$, что влечёт всюду плотность можества значений $\operatorname{Im} A$.

б) Так как $\operatorname{Ker} A = 0$, то все собственные значения A нетривиальны. В силу самосопряжённости A, все его собственные значения вещественны. Пусть вещественное $\lambda \ne 0$ — собственное значение A, а функция $f \in \operatorname{Ker} A_\lambda \backslash \{0\}$, то есть $Af = \lambda f$. Так как очевидно вложение $\operatorname{Im} A \subset \subset C[0,2]$, то $f = \frac{1}{\lambda} Af \in C[0,2]$, откуда сразу следует $f \in A\big(C[0,2]\big)$, то есть $f \in C^2[0,2]$ и

$$\lambda f''(x) = f(x), \quad x \in [0,2], \quad f(0) = 0, \quad f'(2) = f(2).$$

Если $\lambda > 0$, то $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$, где

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} = \operatorname{sh} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th}(2\mu) = \mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\mu_0 > 0$, то есть $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0^2} > 0$ единственное положительное собственное значение оператора A. Ему соответствует собственная функция

$$h_0(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\lambda_0}} = \operatorname{sh}(\mu_0 x).$$

Если $\lambda < 0$, то $f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$, где

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \cos \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} = \sin \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(2\mu) = \mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет счётное множество решений $\{\ \mu_n > 0 :\ n \in \mathbb{N}\ \}$. Именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный корень $\mu_n \in \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем собственное значение $\lambda_n = -\frac{1}{\mu_n^2}$ и соответсвующую ему собственную функцию

$$h_n(x) = \sin\frac{x}{\sqrt{-\lambda_n}} = \sin(\mu_n x).$$

Так как оператор A компактен и самосопряжён, то, по теореме Гильберта—Шмидта, найденная система его собственных функций $\{h_n :\ n \in \mathbb{N}_0\ \}$ образует в пространстве $\mathbb{L}_2[0,2]$ ортогональный базис. Следовательно, для любой функции $f \in \mathbb{L}_2[0,2]$ справедливы равенства:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f, \qquad Af = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, P_n f,$$

где P_n — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\{h_n\}$. Последнее равенство является спектральным разложением оператора A.

в) Самосопряжённый оператор $A^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to \mathbb{L}_2[0,2]$ имеет область определения

$$D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A = \left\{\ g \in \mathbb{L}_2[0,2]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|P_n g\|_2^2}{\lambda_n^2} < +\infty\ \right\}$$

и спектральное разложение

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n g}{\lambda_n}, \qquad g \in \operatorname{Im} A.$$

Следовательно, по определению функции от самосопряжённого оператора, для оператора $T = \cos\left(A^{-1}\right) : D(T) \to \mathbb{L}_2[0,2]$ имеем область определения

$$D(T) = \left\{\ f \in \mathbb{L}_2[0,2]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 < +\infty\ \right\}.$$

и спектральное разложение

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n f, \qquad f \in D(T).$$

Так как $\left|\cos\frac{1}{\lambda_n}\right| \le 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то для любой $f \in \mathbb{L}_2[0,2]$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty, \quad \Rightarrow \quad D(T) = \mathbb{L}_2[0,2].$$

г) Решением является функция

$$u(t) = \exp(-itT)v = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-it\cos\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n v, \qquad t \ge 0,$$

при условии $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,2]$.

6.(4) Область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0, \;\; x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Оператор Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет область определения
$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2\left(\overline{G}\right) \;:\; f\big|_{\partial G} = 0 \right\}.$$

а)(2) Найти область определения и спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}$;

б)(2) Найти решение задачи
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + \sin(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right), \quad u(0) = \frac{\partial}{\partial t} u(0) = 0.$$

Решение: а) В полярных координатах $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, имеем ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ вида $\{ e_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)\sin(n\varphi) \;:\; n, m \in \mathbb{N} \} \subset D(\Delta)$, причём $\Delta e_{n,m} = -\mu_{n,m}^2 e_{n,m}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда область определения $\overline{\Delta}$ имеет вид
$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \left\{ f \in \mathbb{L}_2(G) \;:\; \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 \|P_{n,m} f\|_2^2 < +\infty \right\},$$
где $P_{n,m}$ — ортопроектор в $\mathbb{L}_2(G)$ на $\operatorname{Lin}\{e_{n,m}\}$, то есть $P_{n,m} f = \frac{(f\,,\, e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\, e_{n,m})}\, e_{n,m}$ для $f \in \mathbb{L}_2(G)$, а спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}\colon D\left(\overline{\Delta}\right) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет вид
$$\overline{\Delta} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^2 P_{n,m}.$$

б) Функцию $f \in \mathbb{L}_2(G)$, тождественно равную 1 на G, разложим в ряд Фурье по ортогональному базису $\{ e_{n,m} : n, m \in \mathbb{N} \}$:
$$f = \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{n,m} f = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} e_{n,m}, \quad \text{где} \quad a_{n,m} = \frac{(f\,,\, e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\, e_{n,m})}, \quad \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2.$$

Решение $u(t)$ имеет вид
$$u(t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) e_{n,m}, \quad \text{а} \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 < +\infty,$$
$$\ddot{u}_{n.m}(t) = -\mu_{n,m}^2 u_{n,m}(t) + a_{n,m}\sin(t), \quad t > 0, \quad u_{n,m}(0) = \dot{u}_{n,m}(0) = 0.$$

Тогда
$$u_{n,m}(t) = \left(\frac{a_{n,m}}{\mu_{n,m}^2 - 1}\right)\left(\sin(t) - \frac{\sin(\mu_{n,m} t)}{\mu_{n,m}}\right), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедливо неравенство
$$|u_{n,m}(t)| \leq \frac{2t|a_{n,m}|}{\left|\mu_{n,m}^2 - 1\right|}, \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда вложение $u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right)$ при $t > 0$ следует из оценки
$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}(t)|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4t^2 \mu_{n,m}^4}{\left|\mu_{n,m}^2 - 1\right|^2}\, a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} O\left(a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2\right) < +\infty.$$

7. 4 Найти решение $u(x) \in C^2(|x|<1) \cap C(|x| \le 1)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, задачи

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < 1;$$

$$u(x)\Big|_{|x|=1} = x_1 x_3^2.$$

Ответ: $u = \frac{rY_{1,1} - r^3 Y_{3,1}}{5} = \frac{x_1}{5}\left(1 + 4x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right)$, где

$$Y_{1,1} = \sin\theta\cos\varphi, \quad Y_{3,1} = \sin\theta\left(-5\cos^2\theta + 1\right)\cos\varphi.$$

Решение: В сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

при $|x| = r = 1$ имеем $x_1 x_3^2 = \sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi$. Представим $\cos^2\theta$ линейной комбинацией функций ${P_n}'(\cos\theta)$ по $n \ge 1$. Имеем

$${P_3}'(\tau) = C_{3,1}\cdot\left((1-\tau^2)^3\right)^{(IV)} = C_{3,1}\cdot(-6\cdot\ldots\cdot3\cdot\tau^2 + 3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot) = \underbrace{C_{3,1}\cdot 6\cdot 4\cdot 3}_{=1}\cdot\left(-5\tau^2+1\right) = -5\tau^2 + 1.$$

$${P_1}'(\tau) = C_{1,1}\cdot\left(1-\tau^2\right)'' = 1.$$

Следовательно,

$$\tau^2 = \frac{{P_1}'(\tau) - {P_3}'(\tau)}{5}, \quad \Rightarrow \quad x_1 x_3^2 = \frac{Y_{1,1} - Y_{3,1}}{5},$$

где

$$Y_{1,1} = \sin\theta\, {P_1}'(\cos\theta)\cos\varphi, \quad Y_{3,1} = \sin\theta\, {P_3}'(\cos\theta)\cos\varphi.$$

Тогда решение

$$u = \frac{rY_{1,1} - r^3 Y_{3,1}}{5} = \frac{x_1}{5}\left(1 + 4x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right).$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математическй физики**

Вариант: **182** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ** **2017–2018 уч. г.**

---

1. 4 В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}[\varphi(x,y)](\xi,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\zeta)}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Найти в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ обобщённое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2y}{x-y-i}\right](\xi,\zeta).$$

Ответ:

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2y}{x-y-i}\right](\xi,\zeta) = -(4\pi^2)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\zeta}\left(\delta(\zeta+\xi)\theta(\xi)e^{-\xi}\right).$$

Решение:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{x^2y}{x-y-i}\right](\xi,\zeta) = i\tfrac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\zeta}\,\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{x-y-i}\right](\xi,\zeta).$$

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{x-y-i}\right](\xi,\zeta),\varphi(\xi,\zeta)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\tfrac{dx\,dy}{x-y-i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{ix\xi+iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} dy \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta)\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{x-y-i}\boxed{=}$$

Так как справедливы соотношения

$$\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{x-y-i} \to 2\pi i\,\theta(\xi)\,e^{iy\xi-\xi} \quad \text{при} \quad R\to+\infty,$$

$$\left|\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{x-y-i}\right| \le 2\pi + \tfrac{\pi R}{R-|y|-1} \le 4\pi \quad \text{при} \quad R > 2(|y|+1),$$

$$\left|\varphi(\xi,\zeta)\,e^{iy\zeta}\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{x-y-i}\right| \le 4\pi|\varphi(\xi,\zeta)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2),$$

то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=}\int\limits_{\mathbb{R}} dy\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{iy\zeta}\left(2\pi i\,\theta(\xi)\,e^{iy\xi-\xi}\right) =$$

$$= (2\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\xi)e^{-\xi}\int\limits_{-R}^{R} dy\,e^{iy(\zeta+\xi)} =$$

$$= (4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\xi)e^{-\xi}\,\tfrac{\sin R(\zeta+\xi)}{(\zeta+\xi)} =$$

$$= (4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} dz\left(\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,\varphi(\xi,z-\xi)\theta(\xi)e^{-\xi}\right)\tfrac{\sin Rz}{z} =$$

$$= (4\pi^2 i)\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,\varphi(\xi,-\xi)\theta(\xi)e^{-\xi} = \left\langle (4\pi^2 i)\delta(\zeta+\xi)\theta(\xi)e^{-\xi},\varphi(\xi,\zeta)\right\rangle.$$

2. 4 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ доказать, что существует свёртка

$$\big(\cos(y)\theta(x)\big) * \big(\delta(x-|y|)\big),$$

и вычислить её.

Ответ:

$$\big(\cos(y)\theta(x)\big) * \big(\delta(x-|y|)\big) = 2\theta(x)\sin(x)\cos(y).$$

Решение: Для любой 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем:

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle \cos(y)\theta(x), \eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right) \langle \delta(\xi-|\zeta|), \varphi(\xi+x, \zeta+y)\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} dy\, \cos(y) \int_0^{+\infty} dx\, \eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right) \int_{\mathbb{R}} d\zeta\, \varphi(|\zeta|+x, \zeta+y) \boxed{=}$$

Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ существует $C > 0$:

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \tfrac{C}{(1+\alpha^2)^3(1+\beta^2)} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Тогда для $\alpha = x + |\zeta|$ и $\beta = y + \zeta$ при $x > 0$ получаем:

$$|\varphi(|\zeta|+x, y+\zeta)| \le \tfrac{C}{(1+(x+|\zeta|)^2)^3(1+(y+\zeta)^2)} \le \tfrac{C}{(1+x^2)(1+\zeta^2)^2(1+(y+\zeta)^2)}.$$

Если $\frac{|y|}{2} \ge |\zeta|$, то $1+(y+\zeta)^2 \ge 1 + \frac{y^2}{4}$, поэтому

$$|\varphi(|\zeta|+x, y+\zeta)| \le \tfrac{C}{(1+x^2)(1+\zeta^2)^2\left(1+\frac{y^2}{4}\right)^2} \le \tfrac{C}{(1+x^2)(1+\zeta^2)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)}.$$

Если $\frac{|y|}{2} \le |\zeta|$, то $1+(y+\zeta)^2 \ge 1$ и $1+\zeta^2 \ge 1 + \frac{y^2}{4}$, поэтому

$$|\varphi(|\zeta|+x, y+\zeta)| \le \tfrac{C}{(1+x^2)(1+\zeta^2)^2} \le \tfrac{C}{(1+x^2)(1+\zeta^2)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)}.$$

Так как существует $M > 0$, такое, что $|\eta(x,y)| \le M$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in R$, то при $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in \mathbb{R}$ получаем

$$\left|\cos(y)\eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right)\varphi(|\zeta|+x, y+\zeta)\right| \le \tfrac{MC}{(1+x^2)(1+\zeta^2)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3).$$

При этом $\eta\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right) \to 1$ при $R \to +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, находим:

$$\boxed{=} \int_{\mathbb{R}} dy\, \cos(y) \int_0^{+\infty} dx \int_{\mathbb{R}} d\zeta\, \varphi(|\zeta|+x, \zeta+y) = \int_{\mathbb{R}} d\zeta \int_{|\zeta|}^{+\infty} d\alpha \int_{\mathbb{R}} d\beta\, \cos(\beta-\zeta)\,\varphi(\alpha,\beta) =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{\mathbb{R}} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta) \int_{-\alpha}^{\alpha} d\zeta\, \cos(\beta-\zeta) = \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{\mathbb{R}} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta)\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big) =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\alpha \int_{\mathbb{R}} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta) 2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \langle 2\theta(\alpha)\sin(\alpha)\cos(\beta), \varphi(\alpha,\beta)\rangle.$$

3. (5) В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$L = i\frac{\partial}{\partial t} + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)^2 - i.$$

а)(1) Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

б)(2) Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ оператора L;

в)(2) Найти решение $u(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$Lu(t,x) = \delta(x)\theta(-t)\sin(t).$$

Для справки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(it^2\right)\, dt = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\mathcal{E}(t,x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(-t)}{\sqrt{4\pi(-t)}}\exp\left(t + ix - i\frac{x^2}{4t}\right)$, $u(t,x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(-t)}{\sqrt{4\pi}}e^{ix+t}\int\limits_t^0 \frac{\exp\left(-\xi - i\frac{x^2}{4(t-\xi)}\right)\sin(\xi)}{\sqrt{\xi - t}}\,d\xi$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ равносильно $P_L(\tau,\xi)\mathcal{F}[\mathcal{E}(t,x)](\tau,\xi) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi) = i(-i\tau) + (i(-i\xi)+1)^2 - i = \tau + (\xi+1)^2 - i, \quad |P_L(\tau,\xi)| \geq 1 \quad \forall\,\tau \in \mathbb{R}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi)}\right](t,x).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ преобразование Фурье по переменной x, получаем

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + (\xi+1)^2 - i\right)\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = \delta(t),$$

откуда получаем

$$\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = i\theta(-t)\exp\left(t + it(\xi+1)^2\right).$$

Следовательно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ находим

$$\langle\mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \left\langle\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi), \mathcal{F}_x^{-1}[\varphi(t,x)](\xi)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, i\, e^{t+it(\xi+1)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x) =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{it\zeta^2 - ix\zeta} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix-i\frac{x^2}{4t}}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{-i\left(\sqrt{-t}\zeta - \frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)^2} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix-i\frac{x^2}{4t}}\,\frac{\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-t}} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{-t}}\,e^{t+ix-i\frac{x^2}{4t}} = \left\langle\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-t)}}\,\theta(-t)\,e^{t+ix-i\frac{x^2}{4t}}, \varphi(t,x)\right\rangle$$

в) Решением является свёртка $u(t,x) = (\delta(x)\theta(-t)\sin(t)) * \mathcal{E}(t,x)$. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\langle u(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \sin(t)\, \eta\left(\tfrac{t}{R}, 0\right) \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-\tau)}}\right) e^{\tau + i\xi - i\frac{\xi^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau, \xi) \boxed{=}$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \frac{C}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Далее, существует $M > 0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta)| \le M$. Тогда для $t < 0$, $\tau < 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ получаем

$$\left|\sin(t)\eta(t/R,0)\varphi(t+\tau,\xi)\frac{e^{\tau+i\xi-i\frac{\xi^2}{4\tau}}}{\sqrt{-\tau}}\right| \le \frac{M\,C\,e^{\tau}}{(1+t^2)(1+\xi^2)\sqrt{-\tau}} \in \mathbb{L}_1\left(t<0, \tau<0, \xi\in\mathbb{R}\right).$$

Так как $\eta(t/R, 0) \to 1$ при $R \to +\infty$, то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=} \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \sin(t) \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-\tau)}}\right) e^{\tau+i\xi-i\frac{\xi^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\xi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \sin(t) \int\limits_{-\infty}^{t} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(t-\zeta)}}\right) e^{\zeta-t+i\xi-i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} \varphi(\zeta,\xi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, \varphi(\zeta,\xi) \int\limits_{\zeta}^{0} dt \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\sin(t)}{\sqrt{4\pi(t-\zeta)}}\right) e^{\zeta-t+i\xi-i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} =$$

$$= \left\langle \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right)\theta(-\zeta)e^{i\xi+\zeta} \int\limits_{\zeta}^{0} \frac{e^{-t-i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}\sin(t)}{\sqrt{t-\zeta}}\, dt\,, \varphi(\zeta,\xi) \right\rangle.$$

---

4. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ рассматривается оператор

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} + 2.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$Lu(x,y,z) = \theta(y+z)\delta(x-y).$$

Ответ: $\mathcal{E}(x,y,z) = e^{2x}\theta(-x)\delta(y+x)\delta(z-x)$, $u(x,y,z) = \frac{\theta(y+z)\theta(y-x)}{2}\exp(x-y)$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ равносильно $P_L(\tau,\xi,\zeta)\mathcal{F}[\mathcal{E}(x,y,z)](\tau,\xi,\zeta) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi,\zeta) = i\tau - i\xi + i\zeta + 2, \quad |P_L(\tau,\xi,\zeta)| \ge 2 \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R},\ \zeta \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(x,y,z)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi,\zeta)}\right](x,y,z).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(x,y,z)=\delta(x,y,z)$ преобразование Фурье по y и z, получаем

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+i(-\xi+\zeta)+2\right)F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta)=\delta(x).$$

Следовательно,

$$F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta)=e^{2x+ix(-\xi+\zeta)}\theta(-x).$$

Тогда для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\langle\mathcal{E}(x,y,z),\varphi(x,y,z)\rangle=\left\langle\mathcal{F}_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z)](\xi,\zeta),\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right\rangle=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}dx\,e^{2x}\int\limits_{\mathbb{R}}d\xi\,e^{-ix\xi}\int\limits_{\mathbb{R}}d\zeta\,e^{ix\zeta}\,\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{0}dx\,e^{2x}\,\mathcal{F}_{\xi,\zeta}\left[\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right](-x,x)=\int\limits_{-\infty}^{0}dx\,e^{2x}\,\varphi(x,-x,x)=$$

$$=\left\langle e^{2x}\theta(-x)\delta(y+x)\delta(z-x),\varphi(x,y,z)\right\rangle.$$

в) Решением уравнения является функция

$$u(x,y,z)=\big(\theta(y+z)\delta(x-y)\big)*\mathcal{E}(x,y,z)=\big(\theta(y+z)\delta(x-y)\big)*\big(e^{2x}\theta(-x)\delta(y+x)\delta(z-x)\big).$$

Для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и произвольной 1–срезки $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем:

$$\langle u(x,y,z),\varphi(x,y,z)\rangle=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{y+z>0}dy\,dz\,\eta\left(\tfrac{y}{R},\tfrac{y}{R},\tfrac{z}{R}\right)\int\limits_{-\infty}^{0}d\xi\,e^{2\xi}\,\varphi(y+\xi,y-\xi,z+\xi)\boxed{=}$$

В силу вложения $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, существует $C>0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta,\gamma)|\le\frac{C}{(1+(\alpha+\beta)^2)(1+(\beta+\gamma)^2)}\qquad\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\quad\forall\,\beta\in\mathbb{R},\quad\forall\,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Далее, существует $M>0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta,\gamma)|\le M$. Следовательно,

$$\left|\eta\left(\tfrac{y}{R},\tfrac{y}{R},\tfrac{z}{R}\right)e^{2\xi}\,\varphi(y+\xi,y-\xi,z+\xi)\right|\le\frac{M\,C\,e^{2\xi}}{(1+4y^2)(1+(y+z)^2)}\in\mathbb{L}_1(y+z>0,y\in\mathbb{R},\xi<0)$$

Так как $\eta\left(\frac{x}{R},-\frac{z}{R},\frac{z}{R}\right)\to1$ при $R\to+\infty$, то, по теореме Лебега, получаем:

$$\boxed{=}\int\limits_{y+z>0}dy\,dz\int\limits_{-\infty}^{0}d\xi\,e^{2\xi}\,\varphi(y+\xi,y-\xi,z+\xi)\boxed{=}$$

Сделав замену переменных интегрирования

$$\alpha=y+\xi,\quad\beta=y-\xi,\quad\gamma=z+\xi,$$

получаем

$$y+z=\beta+\gamma>0, \quad \xi=\frac{\alpha-\beta}{2}<0, \quad \left|\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,y,z)}\right|=2,$$

откуда находим, что

$$\boxed{=} \int\limits_{\substack{\beta+\gamma>0\\ \beta-\alpha>0}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \frac{\exp(\alpha-\beta)}{2}\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\left\langle \frac{\theta(y+z)\theta(y-x)}{2}\exp(x-y)\,,\,\varphi(x,y,z)\right\rangle .$$

---

5. 6 Рассматривается линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,3]\to\mathbb{L}_2[0,3]$ вида

$$(Af)(x)=\int\limits_0^x t(2x-1)f(t)\,dt+\int\limits_x^3 x(2t-1)f(t)\,dt, \quad x\in[0,3], \quad f\in\mathbb{L}_2[0,3].$$

а) 1 Доказать, что оператор A компактен, самосопряжён и взаимно однозначен;

б) 2 Найти спектральное разложение оператора A;

в) 1 Найти область определения и спектральное разложение оператора $T=\operatorname{th}(A^{-1})$;

г) 2 Выяснить, для каких функций $v\in\mathbb{L}_2[0,3]$ задача

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t)=Tu(t), \quad t>0, \quad u(t)\in D(T), \quad u(0)=v$$

имеет решение $u(t)$. Найти это решение.

Ответ: а) $\operatorname{Ker}A=\big(\operatorname{Im}A\big)^{\perp}\subset\Big(A\big(C[0,3]\big)\Big)^{\perp}=\{0\}$, так как

$A\big(C[0,3]\big)=\{\ g\in C^2[0,3]\ :\ \ g(0)=0,\ \ 5g'(3)=2g(3)\ \}$ — всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,3]$.

б) $A=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n$, где

$\lambda_0>0$ — единственное решение уравнение $\operatorname{th}\frac{3}{\sqrt{\lambda}}=\frac{5}{2\sqrt{\lambda}}$,

$\lambda_n<0$ при $n\in\mathbb{N}$ — решения уравнения $\operatorname{tg}\frac{3}{\sqrt{-\lambda}}=\frac{5}{2\sqrt{-\lambda}}$,

P_0 — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\Big(\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{\lambda_0}}\Big)$,

P_n при $n\in\mathbb{N}$ — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\Big(\sin\frac{x}{\sqrt{-\lambda_n}}\Big)$;

в) $D(T)=\mathbb{L}_2[0,3], \quad T=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\operatorname{th}\frac{1}{\lambda_n}\Big)P_n$;

г) Для любой функции $v\in D(T)=\mathbb{L}_2[0,3]$ существует решение

$u(t)=\exp(tT)v=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp\Big(t\operatorname{th}\frac{1}{\lambda_n}\Big)P_nv.$

Решение: а) Оператор A является интегральным оператором вида

$$(Af)(x)=\int\limits_0^3 K(t,x)\,f(t)\,dt, \quad f\in\mathbb{L}_2[0,3], \quad x\in[0,3],$$

где функция $K(t,x) \in C\left([0,3]\times[0,3]\right)$ имеет вид

$$K(t,x) = \begin{cases} t(2x-1), & 0 \le t \le x \le 3, \\ x(2t-1), & 0 \le x \le t \le 3. \end{cases}$$

Следовательно, оператор A является компактным. Далее, функция $K(t,x)$ имеет вещественные значения и симметрична: $K(t,x) = K(x,t)$ для всех $t,x \in [0,3]$. Следовательно, оператор A является самосопряжённым. Далее, докажем, что $\operatorname{Im} A$ всюду плотен в $\mathbb{L}_2[0,3]$. Тогда $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0\}$, то есть оператор A инъективен. Действительно, $\operatorname{Im} A \supset A\left(C[0,3]\right)$. Так как очевидно вложение $A\left(C[0,3]\right) \subset C^1[0,3]$, то для функции $f \in C[0,3]$ равенство $g = Af$ равносильно

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \int\limits_0^x 2t\, f(t)\, dt + \int\limits_x^3 (2t-1)\, f(t)\, dt, \quad x \in [0,3].$$

Следовательно, $g \in C^2[0,3]$, и выполнены равенства

$$g'(3)/2 = g(3)/5 = \int\limits_0^3 t f(t)\, dt, \quad g''(x) = f(x), \quad x \in [0,3].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$A\left(C[0,3]\right) = \left\{\ g \in C^2[0,3]\ :\ g(0) = 0,\ \ 5g'(3) = 2g(3)\ \right\}$$

то есть множество $A\left(C[0,3]\right)$ всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,3]$, что влечёт всюду плотность можества значений $\operatorname{Im} A$.

б) Так как $\operatorname{Ker} A = 0$, то все собственные значения A нетривиальны. В силу самосопряжённости A, все его собственные значения вещественны. Пусть вещественное $\lambda \neq 0$ — собственное значение A, а функция $f \in \operatorname{Ker} A_\lambda \backslash \{0\}$, то есть $Af = \lambda f$. Так как очевидно вложение $\operatorname{Im} A \subset \subset C[0,3]$, то $f = \frac{1}{\lambda} Af \in C[0,3]$, откуда сразу следует $f \in A\left(C[0,3]\right)$, то есть $f \in C^2[0,3]$ и

$$\lambda f''(x) = f(x), \quad x \in [0,3], \quad f(0) = 0, \quad 5f'(3) = 2f(3).$$

Если $\lambda > 0$, то $f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$, где

$$\frac{5}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ch} \frac{3}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{sh} \frac{3}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th} \frac{3}{\sqrt{\lambda}} = \frac{5}{2\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th}(3\mu) = \frac{5}{2}\,\mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\mu_0 > 0$, то есть $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0^2} > 0$ единственное положительное собственное значение оператора A. Ему соответствует собственная функция

$$h_0(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{\lambda_0}} = \operatorname{sh}(\mu_0 x).$$

Если $\lambda < 0$, то $f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$, где

$$\frac{5}{\sqrt{-\lambda}} \cos \frac{3}{\sqrt{-\lambda}} = 2 \sin \frac{3}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{5}{2\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(3\mu) = \frac{5}{2}\,\mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет счётное множество решений $\{\ \mu_n > 0 :\ n \in \mathbb{N}\ \}$. Именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный корень $\mu_n \in \left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем собственное значение $\lambda_n = -\frac{1}{\mu_n^2}$ и соответсвующую ему собственную функцию

$$h_n(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{-\lambda_n}} = \sin(\mu_n x).$$

Так как оператор A компактен и самосопряжён, то, по теореме Гильберта—Шмидта, найденная система его собственных функций $\{h_n\ :\ n \in \mathbb{N}_0\ \}$ образует в пространстве $\mathbb{L}_2[0,3]$ ортогональный базис. Следовательно, для любой функции $f \in \mathbb{L}_2[0,3]$ справедливы равенства:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f, \qquad Af = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, P_n f,$$

где P_n — ортопроектор на $\mathrm{Lin}\{h_n\}$. Последнее равенство является спектральным разложением оператора A.

в) Самосопряжённый оператор $A^{-1}\colon \mathrm{Im}\, A \to \mathbb{L}_2[0,3]$ имеет область определения

$$D(A^{-1}) = \mathrm{Im}\, A = \left\{\ g \in \mathbb{L}_2[0,3]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|P_n g\|_2^2}{\lambda_n^2} < +\infty\ \right\}$$

и спектральное разложение

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n g}{\lambda_n}, \qquad g \in \mathrm{Im}\, A.$$

Следовательно, по определению функции от самосопряжённого оператора, для оператора $T = \mathrm{th}\,(A^{-1}) : D(T) \to \mathbb{L}_2[0,3]$ имеем область определения

$$D(T) = \left\{\ f \in \mathbb{L}_2[0,3]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{th}\, \tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 < +\infty\ \right\}.$$

и спектральное разложение

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{th}\, \tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n f, \qquad f \in D(T).$$

Так как $\left|\mathrm{th}\, \frac{1}{\lambda_n}\right| \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то для любой $f \in \mathbb{L}_2[0,3]$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{th}\, \tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty, \quad \Rightarrow \quad D(T) = \mathbb{L}_2[0,3].$$

г) Решением является функция

$$u(t) = \exp(tT)v = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(t\, \mathrm{th}\, \tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n v, \qquad t \geq 0,$$

при условии $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,3]$.

6.(4) Область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0, \ \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Оператор Лапласа $\Delta \colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет область определения

$$D(\Delta) = \left\{ \, f \in C^2\left(\overline{G}\right) \ : \ f\big|_{\partial G} = 0 \, \right\}.$$

а)(2) Найти область определения и спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}$;

б)(2) Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + \operatorname{ch}(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right), \quad u(0) = \frac{\partial}{\partial t} u(0) = 0.$$

Решение: а) В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, имеем ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора $\Delta \colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ вида $\{ \, e_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)\sin(n\varphi) \ : \ n, m \in \mathbb{N} \, \} \subset D(\Delta)$, причём $\Delta e_{n,m} = -\mu_{n,m}^2 e_{n,m}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда область определения $\overline{\Delta}$ имеет вид

$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \left\{ \, f \in \mathbb{L}_2(G) \ : \ \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 \|P_{n,m} f\|_2^2 < +\infty \, \right\},$$

где $P_{n,m}$ — ортопроектор в $\mathbb{L}_2(G)$ на $\operatorname{Lin}\{e_{n,m}\}$, то есть $P_{n,m} f = \frac{(f\,,\,e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\,e_{n,m})}\, e_{n,m}$ для $f \in \mathbb{L}_2(G)$, а спектральное разложение оператора $\overline{\Delta} \colon D\left(\overline{\Delta}\right) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет вид

$$\overline{\Delta} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^2 P_{n,m}.$$

б) Функцию $f \in \mathbb{L}_2(G)$, тождественно равную 1 на G, разложим в ряд Фурье по ортогональному базису $\{ \, e_{n,m} : \, n, m \in \mathbb{N} \, \}$:

$$f = \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{n,m} f = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} e_{n,m}, \quad \text{где} \quad a_{n,m} = \frac{(f\ ,\ e_{n,m})}{(e_{n,m}\ ,\ e_{n,m})}, \quad \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2.$$

Решение $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) e_{n,m}, \quad \text{а} \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 < +\infty,$$

$$\ddot{u}_{n.m}(t) = -\mu_{n,m}^2 u_{n,m}(t) + a_{n,m}\operatorname{ch}(t), \quad t > 0, \quad u_{n,m}(0) = \dot{u}_{n,m}(0) = 0.$$

Тогда

$$u_{n,m}(t) = \left(\frac{a_{n,m}}{\mu_{n,m}^2 + 1} \right) \left(\operatorname{ch}(t) - \cos(\mu_{n,m} t) \right), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедливо неравенство

$$|u_{n,m}(t)| \leq \frac{2\operatorname{ch}(t)|a_{n,m}|}{\left(\mu_{n,m}^2 + 1\right)}, \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда вложение $u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right)$ при $t > 0$ следует из оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}(t)|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4\operatorname{ch}^2(t)\mu_{n,m}^4}{\left(\mu_{n,m}^2 + 1\right)^2} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} O\left(a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2\right) < +\infty.$$

7. 4 Найти решение $u(x) \in C^2(|x|<1) \cap C(|x| \le 1)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, задачи

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < 1;$$

$$u(x)\big|_{|x|=1} = x_1^2 x_3.$$

Ответ: $u = \frac{r^3}{2}\, Y_{3,2} + \frac{r^3}{10}\, Y_{3,0} + \frac{r}{5}\, Y_{1,0} = \frac{x_3}{5}\left(4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1\right)$, где

$$Y_{3,0} = -5\cos^3\theta + 3\cos\theta, \quad Y_{1,0} = \cos\theta, \quad Y_{3,2} = \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi.$$

Решение: В сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

при $|x| = r = 1$ имеем $x_1^2 x_3 = \sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\cos\theta$.

$$P_3{}''(\tau) = C_{3,2}\left((1-\tau^2)^3\right)^{(V)} = \tau, \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi = \sin^2\theta\, P_3{}''(\cos\theta)\cos 2\varphi = Y_{3,2}.$$

Представим $\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\cos\theta$ линейной комбинацией функций $P_n(\cos\theta)$ по $n \ge 1$. Имеем

$$P_3(\tau) = C_{3,0}\cdot\left((1-\tau^2)^3\right)''' = C_{3,0}\cdot(-6\cdot5\cdot4\cdot\tau^3 + 3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot\tau) = \underbrace{C_{3,0}\cdot 6\cdot 4}_{=1}\cdot\left(-5\tau^3 + 3\tau\right) = -5\tau^3 + 3\tau.$$

$$P_1(\tau) = C_{1,0}\cdot\left(1-\tau^2\right)' = \underbrace{-C_{1,0}\cdot 2}_{=1}\cdot\tau = \tau.$$

Следовательно,

$$\frac{\tau - \tau^3}{2} = \frac{1}{10}\left(P_3(\tau) - 3P_1(\tau)\right) + \frac{1}{2}P_1(\tau) = \frac{1}{10}P_3(\tau) + \frac{1}{5}\,P_1(\tau).$$

Тогда

$$x_1^2 x_3 = \frac{1}{2}\,Y_{3,2} + \frac{1}{10}\,Y_{3,0} + \frac{1}{5}\,Y_{1,0},$$

где

$$Y_{3,0} = -5\cos^3\theta + 3\cos\theta, \quad Y_{1,0} = \cos\theta, \quad Y_{3,2} = \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi.$$

Тогда решение

$$u = \frac{r^3}{2}\,Y_{3,2} + \frac{r^3}{10}\,Y_{3,0} + \frac{r}{5}\,Y_{1,0} = \frac{x_3}{5}\left(4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1\right).$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математическй физики**

Вариант: 183 Курс: 3 Факультет: ФОПФ 2017–2018 уч. г.

---

1. 4 В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}[\varphi(x,y)](\xi,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\zeta)}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy, \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Найти в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ обобщённое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}\left[\frac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta).$$

Ответ:

$$\mathcal{F}\left[\frac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = (4\pi^2)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\zeta^2}\left(\delta(\zeta+\xi)\theta(\xi)e^{-\xi}\right).$$

Решение:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{xy^2}{y-x+i}\right](\xi,\zeta) = i\tfrac{\partial^3}{\partial\xi\partial\zeta^2}\,\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta).$$

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{y-x+i}\right](\xi,\zeta),\varphi(\xi,\zeta)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\tfrac{dx\,dy}{y-x+i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{ix\xi+iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} dy \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta)\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{y-x+i}\boxed{=}$$

Так как справедливы соотношения

$$\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{y-x+i} \to -2\pi i\,\theta(\xi)\,e^{iy\xi-\xi} \quad \text{при} \quad R\to+\infty,$$

$$\left|\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{y-x+i}\right| \le 2\pi + \tfrac{\pi R}{R-|y|-1} \le 4\pi \quad \text{при} \quad R > 2(|y|+1),$$

$$\left|\varphi(\xi,\zeta)\,e^{iy\zeta}\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{ix\xi}\,dx}{y-x+i}\right| \le 4\pi|\varphi(\xi,\zeta)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2),$$

то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=}\int\limits_{\mathbb{R}} dy\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{iy\zeta}\left(-2\pi i\,\theta(\xi)\,e^{iy\xi-\xi}\right) =$$

$$= (-2\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\xi)e^{-\xi}\int\limits_{-R}^{R} dy\,e^{iy(\zeta+\xi)} =$$

$$= (-4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\xi)e^{-\xi}\,\tfrac{\sin R(\zeta+\xi)}{(\zeta+\xi)} =$$

$$= (-4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} dz\left(\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,\varphi(\xi,z-\xi)\theta(\xi)e^{-\xi}\right)\tfrac{\sin Rz}{z} =$$

$$= (-4\pi^2 i)\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,\varphi(\xi,-\xi)\theta(\xi)e^{-\xi} = \left\langle(-4\pi^2 i)\delta(\zeta+\xi)\theta(\xi)e^{-\xi},\varphi(\xi,\zeta)\right\rangle.$$

2.(4) В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ доказать, что существует свёртка

$$\big(\theta(x+y)\big) * \big(\delta(x-y)\theta(y)\big)\,,$$

и вычислить её.

Ответ:

$$\big(\theta(x+y)\big) * \big(\delta(x-y)\theta(y)\big) = \theta(x+y)\,\frac{(x+y)}{2}.$$

Решение: Для любой 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем:

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle \theta(x+y), \eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right) \langle \delta(\xi-\zeta)\theta(\zeta), \varphi(\xi+x, \zeta+y)\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{x+y>0} dx\,dy\,\eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right) \int\limits_0^{+\infty} d\zeta\,\varphi(x+\zeta, y+\zeta) \boxed{=}$$

Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ существует $C>0$:

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \tfrac{C}{(1+(\alpha+\beta)^2)^3(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Тогда для $\alpha = x+\zeta$ и $\beta = y+\zeta$ при $x+y>0$ и $\zeta>0$ имеем $\alpha+\beta = x+y+2\zeta > 2\zeta > 0$, поэтому

$$|\varphi(x+\zeta, y+\zeta)| \le \tfrac{C}{(1+4\zeta^2)^3(1+(x+\zeta)^2)(1+(y+\zeta)^2)}.$$

Заметим, что

$$(1+4\zeta^2)(1+(x+\zeta)^2) \ge \left\{\begin{array}{ll} \left(1+\frac{x^2}{4}\right), & \frac{|x|}{2} \ge \zeta, \\ (1+x^2), & \frac{|x|}{2} \le \zeta, \end{array}\right\} \ge \left(1+\tfrac{x^2}{4}\right),$$

$$(1+4\zeta^2)(1+(y+\zeta)^2) \ge \left\{\begin{array}{ll} \left(1+\frac{y^2}{4}\right), & \frac{|y|}{2} \ge \zeta, \\ (1+y^2), & \frac{|y|}{2} \le \zeta, \end{array}\right\} \ge \left(1+\tfrac{y^2}{4}\right),$$

Так как существует $M>0$, такое, что $|\eta(x,y)| \le M$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y\in R$, то при $x+y>0$ и $\zeta>0$ получаем:

$$\left|\eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}\right)\varphi(x+\zeta, y+\zeta)\right| \le \tfrac{MC}{(1+4\zeta^2)\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1+\frac{y^2}{4}\right)} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3).$$

При этом $\eta\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right) \to 1$ при $R\to+\infty$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y\in\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, находим:

$$\boxed{=} \int\limits_{x+y>0} dx\,dy \int\limits_0^{+\infty} d\zeta\,\varphi(x+\zeta, y+\zeta) = \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{x+y>0} dx\,dy\,\varphi(x+\zeta, y+\zeta) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_{\alpha+\beta>2\zeta} d\alpha\,d\beta\,\varphi(\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha+\beta>0} d\alpha\,d\beta\,\varphi(\alpha,\beta) \int\limits_0^{\frac{\alpha+\beta}{2}} d\zeta = \left\langle \theta(\alpha+\beta)\tfrac{\alpha+\beta}{2}, \varphi(\alpha,\beta)\right\rangle.$$

3. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\right)^2 + 1.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$Lu(t,x) = \frac{\delta(x)\theta(t)}{1+t}.$$

Для справки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(it^2\right)\, dt = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\mathcal{E}(t,x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-t - ix + i\frac{x^2}{4t}\right)$, $u(t,x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}\theta(t)}{\sqrt{4\pi}} e^{-ix-t}\int\limits_0^t \frac{\exp\left(\xi + i\frac{x^2}{4(t-\xi)}\right)}{(1+\xi)\sqrt{(t-\xi)}}\, d\xi$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ равносильно $P_L(\tau,\xi)\mathcal{F}[\mathcal{E}(t,x)](\tau,\xi) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi) = -i\tau + i(-i\xi + i)^2 + 1 = -i\tau - i(\xi-1)^2 + 1, \quad |P_L(\tau,\xi)| \geq 1 \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi)}\right](t,x).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ преобразование Фурье по переменной x, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i(\xi-1)^2 + 1\right)\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = \delta(t),$$

откуда получаем

$$\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = \theta(t)\exp\left(-t + it(\xi-1)^2\right).$$

Следовательно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ находим

$$\langle \mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \left\langle \mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi), \mathcal{F}_x^{-1}[\varphi(t,x)](\xi)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{-t+it(\xi-1)^2}\, \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\, e^{-t-ix}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{-it\zeta^2 - ix\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\, e^{-t-ix+i\frac{x^2}{4t}}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{-i\left(\sqrt{t}\zeta + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\, e^{-t-ix+i\frac{x^2}{4t}}\,\frac{\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t}}\, e^{-t-ix+i\frac{x^2}{4t}} = \left\langle \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi t}}\,\theta(t)\, e^{-t-ix+i\frac{x^2}{4t}}, \varphi(t,x)\right\rangle$$

в) Решением является свёртка $u(t,x) = \frac{\delta(x)\theta(t)}{1+t} * \mathcal{E}(t,x)$. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\langle u(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}\, \eta\left(\tfrac{t}{R},0\right) \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}}\right) e^{-\tau - i\xi + i\frac{\xi^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\xi) \boxed{=}$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \frac{C}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\,\beta \in \mathbb{R}.$$

Далее, существует $M > 0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta)| \le M$. Тогда для $t > 0$, $\tau > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ получаем

$$\left|\frac{\eta(t/R,0)\varphi(t+\tau,\xi)e^{-\tau-i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}}{(1+t)\sqrt{\tau}}\right| \le \frac{M\,C\,e^{-\tau}}{(1+t^2)(1+\xi^2)\sqrt{\tau}} \in \mathbb{L}_1\,(t>0,\tau>0,\xi\in\mathbb{R})\,.$$

Так как $\eta(t/R,0) \to 1$ при $R \to +\infty$, то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\begin{aligned}
\boxed{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\tfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\tau}}\right) e^{-\tau-i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}} \varphi(t+\tau,\xi) &= \\
= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t} \int_t^{+\infty} d\zeta \int_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(\zeta-t)}}\right) e^{-\zeta+t-i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} \varphi(\zeta,\xi) &= \\
= \int_0^{+\infty} d\zeta \int_{\mathbb{R}} d\xi\, \varphi(\zeta,\xi) \int_0^{\zeta} dt \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1+t)\sqrt{4\pi(\zeta-t)}}\right) e^{-\zeta+t-i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} &= \\
= \left\langle \left(\tfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right)\theta(\zeta)e^{-i\xi-\zeta} \int_0^{\zeta} \frac{e^{t+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}}{(1+t)\sqrt{(\zeta-t)}}\,dt\,, \varphi(\zeta,\xi)\right\rangle&.
\end{aligned}$$

---

4. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ рассматривается оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} - 1.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$Lu(x,y,z) = \theta(x-y)\delta(y-z).$$

Ответ: $\mathcal{E}(x,y,z) = -e^x\theta(-x)\delta(y-x)\delta(z+x)$, $u(x,y,z) = -\frac{\theta(x-y)\theta(z-y)}{2}\exp\left(\frac{y-z}{2}\right)$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ равносильно $P_L(\tau,\xi,\zeta)\mathcal{F}[\mathcal{E}(x,y,z)](\tau,\xi,\zeta) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi,\zeta) = -i\tau - i\xi + i\zeta - 1, \quad |P_L(\tau,\xi,\zeta)| \ge 1 \quad \forall\,\tau\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R},\ \zeta\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(x,y,z) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi,\zeta)}\right](x,y,z).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ преобразование Фурье по y и z, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i(\xi-\zeta) - 1\right) F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta) = \delta(x).$$

Следовательно,

$$F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta) = -e^{x+ix(\xi-\zeta)}\theta(-x).$$

Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\langle \mathcal{E}(x,y,z), \varphi(x,y,z)\rangle = \left\langle \mathcal{F}_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z)](\xi,\zeta), \mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dx\ (-e^x) \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{ix\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\, e^{-ix\zeta}\, \mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dx\ (-e^x)\ \mathcal{F}_{\xi,\zeta}\left[\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right](x,-x) = \int\limits_{-\infty}^{0} dx\ (-e^x)\ \varphi(x,x,-x) =$$

$$= \langle -e^x\theta(-x)\delta(y-x)\delta(z+x), \varphi(x,y,z)\rangle.$$

в) Решением уравнения является функция

$$u(x,y,z) = \big(\theta(x-y)\delta(y-z)\big) * \mathcal{E}(x,y,z) = \big(\theta(x-y)\delta(y-z)\big) * \big(-e^x\theta(-x)\delta(y-x)\delta(z+x)\big).$$

Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем:

$$\langle u(x,y,z), \varphi(x,y,z)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{x-y>0} dx\, dy\, \eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}, \tfrac{y}{R}\right) \int\limits_{-\infty}^{0} d\xi\ \left(-e^{\xi}\right)\ \varphi(x+\xi, y+\xi, y-\xi) \boxed{=}$$

В силу вложения $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta,\gamma)| \le \frac{C}{(1+(\alpha-\beta)^2)(1+(\beta+\gamma)^2)} \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\beta\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Далее, существует $M > 0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta,\gamma)| \le M$. Следовательно,

$$\left|\eta\left(\tfrac{x}{R}, \tfrac{y}{R}, \tfrac{y}{R}\right) e^{\xi}\,\varphi(x+\xi,y+\xi,y-\xi)\right| \le \frac{M\,C\,e^{\xi}}{(1+(x-y)^2)(1+4y^2)} \in \mathbb{L}_1(x-y>0, y\in\mathbb{R}, \xi<0)$$

Так как $\eta\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{y}{R}\right) \to 1$ при $R\to+\infty$, то, по теореме Лебега, получаем:

$$\boxed{=} \int\limits_{x-y>0} dx\, dz \int\limits_{-\infty}^{0} d\xi\ \left(-e^{\xi}\right)\ \varphi(x+\xi,y+\xi,y-\xi) \boxed{=}$$

Сделав замену переменных интегрирования

$$\alpha = x+\xi, \quad \beta = y+\xi, \quad \gamma = y-\xi,$$

получаем

$$x - y = \alpha - \beta > 0, \quad \xi = \frac{\beta - \gamma}{2} < 0, \quad \left| \frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)} \right| = 2,$$

откуда находим, что

$$\boxed{=} \int\limits_{\substack{\alpha-\beta>0 \\ \beta-\gamma<0}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \left(-\frac{\exp\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{2} \right) \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \left\langle -\frac{\theta(x-y)\theta(z-y)}{2} \exp\left(\frac{y-z}{2}\right), \varphi(x, y, z) \right\rangle.$$

---

5. 6 Рассматривается линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,4] \to \mathbb{L}_2[0,4]$ вида

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x t(x-2)f(t)\, dt + \int\limits_x^4 x(t-2)f(t)\, dt, \quad x \in [0,4], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,4].$$

а) 1 Доказать, что оператор A компактен, самосопряжён и взаимно однозначен;

б) 2 Найти спектральное разложение оператора A;

в) 1 Найти область определения и спектральное разложение оператора $T = \sin(A^{-1})$;

г) 2 Выяснить, для каких функций $v \in \mathbb{L}_2[0,4]$ задача

$$i\frac{\partial}{\partial t} u(t) = Tu(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D(T), \quad u(0) = v.$$

имеет решение $u(t)$. Найти это решение.

Ответ: а) $\operatorname{Ker} A = \big(\operatorname{Im} A\big)^{\perp} \subset \Big(A\left(C[0,4]\right)\Big)^{\perp} = \{0\}$, так как

$A\left(C[0,4]\right) = \{\ g \in C^2[0,4]\ :\ g(0) = 0,\ 2g'(4) = g(4)\ \}$ — всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,4]$.

б) $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$, где

$\lambda_0 > 0$ — единственное решение уравнение $\operatorname{th} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$,

$\lambda_n < 0$ при $n \in \mathbb{N}$ — решения уравнения $\operatorname{tg} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}}$,

P_0 — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda_0}}\right)$,

P_n при $n \in \mathbb{N}$ — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\sin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda_n}}\right)$;

в) $D(T) = \mathbb{L}_2[0,4], \quad T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\lambda_n}\right) P_n$;

г) Для любой функции $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,4]$ существует решение

$u(t) = \exp(-itT)v = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-it \sin \frac{1}{\lambda_n}\right) P_n v.$

Решение: а) Оператор A является интегральным оператором вида

$$(Af)(x) = \int\limits_0^4 K(t,x)\, f(t)\, dt, \quad f \in \mathbb{L}_2[0,4], \quad x \in [0,4],$$

где функция $K(t,x) \in C\left([0,4]\times[0,4]\right)$ имеет вид

$$K(t,x) = \begin{cases} t(x-2), & 0 \le t \le x \le 4, \\ x(t-2), & 0 \le x \le t \le 4. \end{cases}$$

Следовательно, оператор A является компактным. Далее, функция $K(t,x)$ имеет вещественные значения и симметрична: $K(t,x) = K(x,t)$ для всех $t,x \in [0,4]$. Следовательно, оператор A является самосопряжённым. Далее, докажем, что $\operatorname{Im} A$ всюду плотен в $\mathbb{L}_2[0,4]$. Тогда $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp = \{0\}$, то есть оператор A инъективен. Действительно, $\operatorname{Im} A \supset A\left(C[0,4]\right)$. Так как очевидно вложение $A\left(C[0,4]\right) \subset C^1[0,4]$, то для функции $f \in C[0,4]$ равенство $g = Af$ равносильно

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \int\limits_0^x t\, f(t)\, dt + \int\limits_x^4 (t-2)\, f(t)\, dt, \quad x \in [0,4].$$

Следовательно, $g \in C^2[0,4]$, и выполнены равенства

$$g'(4) = g(4)/2 = \int\limits_0^4 tf(t)\, dt, \quad g''(x) = 2f(x), \quad x \in [0,4].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$A\left(C[0,4]\right) = \left\{\ g \in C^2[0,4]\ :\ g(0) = 0,\ \ 2g'(4) = g(4)\ \right\}$$

то есть множество $A\left(C[0,4]\right)$ всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,4]$, что влечёт всюду плотность можества значений $\operatorname{Im} A$.

б) Так как $\operatorname{Ker} A = 0$, то все собственные значения A нетривиальны. В силу самосопряжённости A, все его собственные значения вещественны. Пусть вещественное $\lambda \ne 0$ — собственное значение A, а функция $f \in \operatorname{Ker} A_\lambda \backslash \{0\}$, то есть $Af = \lambda f$. Так как очевидно вложение $\operatorname{Im} A \subset$ $\subset C[0,4]$, то $f = \frac{1}{\lambda} Af \in C[0,4]$, откуда сразу следует $f \in A\left(C[0,4]\right)$, то есть $f \in C^2[0,4]$ и

$$\lambda f''(x) = 2f(x), \quad x \in [0,4], \quad f(0) = 0, \quad 2f'(4) = f(4).$$

Если $\lambda > 0$, то $f(x) = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda}}$, где

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ch} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \operatorname{sh} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th}(2\mu) = \mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\mu_0 > 0$, то есть $\lambda_0 = \frac{8}{\mu_0^2} > 0$ единственное положительное собственное значение оператора A. Ему соответствует собственная функция

$$h_0(x) = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda_0}} = \operatorname{sh} \frac{\mu_0 x}{2}.$$

Если $\lambda < 0$, то $f(x) = \sin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda}}$, где

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} \cos \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} = \sin \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(2\mu) = \mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет счётное множество решений $\{\ \mu_n > 0 : \ n \in \mathbb{N}\ \}$. Именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный корень $\mu_n \in \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем собственное значение $\lambda_n = -\frac{8}{\mu_n^2}$ и соответсвующую ему собственную функцию

$$h_n(x) = \sin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda_n}} = \sin\frac{\mu_n x}{2}.$$

Так как оператор A компактен и самосопряжён, то, по теореме Гильберта—Шмидта, найденная система его собственных функций $\{h_n \ : \ n \in \mathbb{N}_0\ \}$ образует в пространстве $\mathbb{L}_2[0,4]$ ортогональный базис. Следовательно, для любой функции $f \in \mathbb{L}_2[0,4]$ справедливы равенства:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f, \qquad Af = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, P_n f,$$

где P_n — ортопроектор на $\mathrm{Lin}\{h_n\}$. Последнее равенство является спектральным разложением оператора A.

в) Самосопряжённый оператор $A^{-1}\colon \mathrm{Im}\, A \to \mathbb{L}_2[0,4]$ имеет область определения

$$D(A^{-1}) = \mathrm{Im}\, A = \left\{ g \in \mathbb{L}_2[0,4] \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|P_n g\|_2^2}{\lambda_n^2} < +\infty \right\}$$

и спектральное разложение

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n g}{\lambda_n}, \qquad g \in \mathrm{Im}\, A.$$

Следовательно, по определению функции от самосопряжённого оператора, для оператора $T = \sin\left(A^{-1}\right) : D(T) \to \mathbb{L}_2[0,4]$ имеем область определения

$$D(T) = \left\{ f \in \mathbb{L}_2[0,4] \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 < +\infty \right\}.$$

и спектральное разложение

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n f, \qquad f \in D(T).$$

Так как $\left|\sin\tfrac{1}{\lambda_n}\right| \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то для любой $f \in \mathbb{L}_2[0,4]$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty, \quad \Rightarrow \quad D(T) = \mathbb{L}_2[0,4].$$

г) Решением является функция

$$u(t) = \exp(-itT)v = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-it\sin\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n v, \qquad t \geq 0,$$

при условии $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,4]$.

6. (4) Область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, \ \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Оператор Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет область определения

$$D(\Delta) = \left\{ \, f \in C^2\left(\overline{G}\right) \ : \ f\big|_{\partial G} = 0 \, \right\}.$$

а)(2) Найти область определения и спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}$;

б)(2) Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + \cos(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right), \quad u(0) = \frac{\partial}{\partial t} u(0) = 0.$$

Решение: а) В полярных координатах $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, имеем ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ вида $\{ \, e_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)\sin(n\varphi) \ : \ n, m \in \mathbb{N} \, \} \subset D(\Delta)$, причём $\Delta e_{n,m} = -\mu_{n,m}^2 e_{n,m}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда область определения $\overline{\Delta}$ имеет вид

$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \left\{ \, f \in \mathbb{L}_2(G) \ : \ \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 \|P_{n,m} f\|_2^2 < +\infty \, \right\},$$

где $P_{n,m}$ — ортопроектор в $\mathbb{L}_2(G)$ на $\mathrm{Lin}\,\{e_{n,m}\}$, то есть $P_{n,m} f = \frac{(f\,,\,e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\,e_{n,m})}\, e_{n,m}$ для $f \in \mathbb{L}_2(G)$, а спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}\colon D\left(\overline{\Delta}\right) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет вид

$$\overline{\Delta} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^2 P_{n,m}.$$

б) Функцию $f \in \mathbb{L}_2(G)$, тождественно равную 1 на G, разложим в ряд Фурье по ортогональному базису $\{ \, e_{n,m} : \, n, m \in \mathbb{N} \, \}$:

$$f = \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{n,m} f = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} e_{n,m}, \quad \text{где} \quad a_{n,m} = \frac{(f\,,\,e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\,e_{n,m})}, \quad \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2.$$

Решение $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) e_{n,m}, \quad \text{а} \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 < +\infty,$$

$$\ddot{u}_{n.m}(t) = -\mu_{n,m}^2 u_{n,m}(t) + a_{n,m}\cos(t), \quad t > 0, \quad u_{n,m}(0) = \dot{u}_{n,m}(0) = 0.$$

Тогда

$$u_{n,m}(t) = \left(\frac{a_{n,m}}{\mu_{n,m}^2 - 1}\right)\left(\cos(t) - \cos(\mu_{n,m} t)\right), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедливо неравенство

$$|u_{n,m}(t)| \leq \frac{2|a_{n,m}|}{\left|\mu_{n,m}^2 - 1\right|}, \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда вложение $u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right)$ при $t > 0$ следует из оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}(t)|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4\mu_{n,m}^4}{\left|\mu_{n,m}^2 - 1\right|^2}\, a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} O\left(a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2\right) < +\infty.$$

7. 4 Найти решение $u(x) \in C^2(|x| < 1) \cap C(|x| \le 1)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, задачи

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < 1;$$

$$u(x)\Big|_{|x|=1} = x_2 x_3^2.$$

Ответ: $u = \frac{rY_{1,-1} - r^3 Y_{3,-1}}{5} = \frac{x_2}{5}\left(1 + 4x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right)$, где

$$Y_{1,-1} = \sin\theta \sin\varphi, \quad Y_{3,-1} = \sin\theta \left(-5\cos^2\theta + 1\right)\sin\varphi.$$

Решение: В сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

при $|x| = r = 1$ имеем $x_2 x_3^2 = \sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi$. Представим $\cos^2\theta$ линейной комбинацией функций $P_n{}'(\cos\theta)$ по $n \ge 1$. Имеем

$$P_3{}'(\tau) = C_{3,1} \cdot \left((1-\tau^2)^3\right)^{(IV)} = C_{3,1} \cdot (-6 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot \tau^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) = \underbrace{C_{3,1} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}_{=1} \cdot \left(-5\tau^2 + 1\right) = -5\tau^2 + 1.$$

$$P_1{}'(\tau) = C_{1,1} \cdot \left(1 - \tau^2\right)'' = 1.$$

Следовательно,

$$\tau^2 = \frac{P_1{}'(\tau) - P_3{}'(\tau)}{5}, \quad \Rightarrow \quad x_2 x_3^2 = \frac{Y_{1,-1} - Y_{3,-1}}{5},$$

где

$$Y_{1,-1} = \sin\theta\, P_1{}'(\cos\theta)\sin\varphi, \quad Y_{3,-1} = \sin\theta\, P_3{}'(\cos\theta)\sin\varphi.$$

Тогда решение

$$u = \frac{rY_{1,-1} - r^3 Y_{3,-1}}{5} = \frac{x_2}{5}\left(1 + 4x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right).$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математическй физики**

Вариант: **184** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ** **2017–2018 уч. г.**

---

1. 4 В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}[\varphi(x,y)](\xi,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\zeta)}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Найти в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ обобщённое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2y^2}{i-x-y}\right](\xi,\zeta).$$

Ответ:

$$\mathcal{F}\left[\frac{x^2y^2}{i-x-y}\right](\xi,\zeta) = (-4\pi^2 i)\,\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\zeta^2}\,\left(\delta(\xi-\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta}\right).$$

Решение:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{x^2y^2}{i-x-y}\right](\xi,\zeta) = \tfrac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\zeta^2}\,\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{i-x-y}\right](\xi,\zeta).$$

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{i-x-y}\right](\xi,\zeta), \varphi(\xi,\zeta)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\tfrac{dx\,dy}{i-x-y}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,e^{ix\xi+iy\zeta}\varphi(\xi,\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} dx \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi}\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{i-x-y}\boxed{=}$$

Так как справедливы соотношения

$$\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{i-x-y} \to -2\pi i\,\theta(\zeta)\,e^{-ix\zeta-\zeta} \quad \text{при} \quad R\to+\infty,$$

$$\left|\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{i-x-y}\right| \le 2\pi + \tfrac{\pi R}{R-|x|-1} \le 4\pi \quad \text{при} \quad R > 2(|x|+1),$$

$$\left|\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi}\int\limits_{-R}^{R}\tfrac{e^{iy\zeta}\,dy}{i-x-y}\right| \le 4\pi|\varphi(\xi,\zeta)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^2),$$

то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=}\int\limits_{\mathbb{R}} dx\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\,e^{ix\xi}\,\left(-2\pi i\,\theta(\zeta)\,e^{-ix\zeta-\zeta}\right) =$$

$$= (-2\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta}\int\limits_{-R}^{R} dx\,e^{ix(\xi-\zeta)} =$$

$$= (-4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\,d\zeta\,\varphi(\xi,\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta}\,\tfrac{\sin R(\xi-\zeta)}{(\xi-\zeta)} =$$

$$= (-4\pi i)\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} dz\left(\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,\varphi(z+\zeta,\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta}\right)\tfrac{\sin Rz}{z} =$$

$$= (-4\pi^2 i)\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,\varphi(\zeta,\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta} = \left\langle(-4\pi^2 i)\delta(\xi-\zeta)\theta(\zeta)e^{-\zeta}, \varphi(\xi,\zeta)\right\rangle.$$

2. 4 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ доказать, что существует свёртка

$$\big(\sin(x)\theta(-y)\big) * \big(\delta(y+|x|)\big),$$

и вычислить её.

Ответ:

$$\big(\sin(x)\theta(-y)\big) * \big(\delta(y+|x|)\big) = -2\theta(-y)\sin(x)\sin(y).$$

Решение: Для любой 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ имеем:

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle \sin(x)\theta(-y), \eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right) \langle \delta(|\xi|+\zeta), \varphi(\xi+x,\zeta+y)\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dx\, \sin(x) \int\limits_{-\infty}^{0} dy\, \eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, \varphi(\xi+x, y-|\xi|) \boxed{=}$$

Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ существует $C>0$:

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \le \tfrac{C}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)^3} \qquad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}, \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Тогда для $\alpha = x+\xi$ и $\beta = y-|\xi|$ при $y<0$ получаем:

$$|\varphi(x+\xi, y-|\xi|)| \le \tfrac{C}{(1+(x+\xi)^2)(1+(y-|\xi|)^2)^3} \le \tfrac{C}{(1+(x+\xi)^2)(1+\zeta^2)^2(1+y^2)}.$$

Если $\frac{|x|}{2} \ge |\xi|$, то $1+(x+\xi)^2 \ge 1+\frac{x^2}{4}$, поэтому

$$|\varphi(x+\xi, y-|\xi|)| \le \tfrac{C}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)(1+\xi^2)^2(1+y^2)^2} \le \tfrac{C}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)(1+\xi^2)(1+y^2)}.$$

Если $\frac{|x|}{2} \le |\xi|$, то $1+(x+\xi)^2 \ge 1$ и $1+\xi^2 \ge 1+\frac{x^2}{4}$, поэтому

$$|\varphi(x+\xi, y-|\xi|)| \le \tfrac{C}{(1+\xi^2)^2(1+y^2)} \le \tfrac{C}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)(1+\xi^2)(1+y^2)}.$$

Так как существует $M>0$, такое, что $|\eta(x,y)| \le M$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y \in R$, то при $x\in\mathbb{R}$, $y<0$ и $\xi\in\mathbb{R}$ получаем

$$\left|\sin(x)\eta\left(\tfrac{x}{R},\tfrac{y}{R}\right)\varphi(x+\xi,y-|\xi|)\right| \le \tfrac{MC}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)(1+\xi^2)(1+y^2)} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3).$$

При этом $\eta\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right) \to 1$ при $R\to+\infty$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и $y\in\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, находим:

$$\boxed{=} \int\limits_{\mathbb{R}} dx\, \sin(x) \int\limits_{-\infty}^{0} dy \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, \varphi(x+\xi, y-|\xi|) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \int\limits_{-\infty}^{-|\xi|} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}} d\alpha\, \sin(\alpha-\xi)\,\varphi(\alpha,\beta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta) \int\limits_{\beta}^{-\beta} d\xi\, \sin(\alpha-\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta)\big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha,\beta)(-2)\sin(\alpha)\sin(\beta) = \langle -2\theta(-\beta)\sin(\alpha)\sin(\beta), \varphi(\alpha,\beta)\rangle.$$

3. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\right)^2 - 1$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$Lu(t,x) = \delta(x)\theta(-t)\cos(t).$$

Для справки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(it^2\right)\,dt = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\mathcal{E}(t,x) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(-t)}{\sqrt{4\pi(-t)}}\exp\left(t + ix + i\frac{x^2}{4t}\right)$, $u(t,x) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\theta(-t)}{\sqrt{4\pi}}e^{ix+t}\int\limits_{t}^{0}\frac{\exp\left(-\xi + i\frac{x^2}{4(t-\xi)}\right)\cos(\xi)}{\sqrt{\xi - t}}\,d\xi$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ равносильно $P_L(\tau,\xi)\mathcal{F}[\mathcal{E}(t,x)](\tau,\xi) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi) = -i\tau - i(-i\xi - i)^2 - 1 = -i\tau + i(\xi+1)^2 - 1, \quad |P_L(\tau,\xi)| \geq 1 \quad \forall\,\tau \in \mathbb{R}, \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi)}\right](t,x).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$ преобразование Фурье по переменной x, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i(\xi+1)^2 - 1\right)\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = \delta(t),$$

откуда получаем

$$\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi) = -\theta(-t)\exp\left(t - it(\xi+1)^2\right).$$

Следовательно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ находим

$$\langle\mathcal{E}(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \left\langle\mathcal{F}_x[\mathcal{E}(t,x)](\xi), \mathcal{F}_x^{-1}[\varphi(t,x)](\xi)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\,(-1)\,e^{t-it(\xi+1)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} dx\,e^{-ix\xi}\,\varphi(t,x) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,e^{-it\zeta^2 - ix\zeta} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix+i\frac{x^2}{4t}}\int\limits_{\mathbb{R}} d\zeta\,e^{i\left(\sqrt{-t}\zeta - \frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\varphi(t,x)\,e^{t+ix+i\frac{x^2}{4t}}\,\frac{\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-t}} =$$

$$= -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\,\frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{-t}}\,e^{t+ix+i\frac{x^2}{4t}} = \left\langle -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-t)}}\,\theta(-t)\,e^{t+ix+i\frac{x^2}{4t}}, \varphi(t,x)\right\rangle$$

в) Решением является свёртка $u(t,x) = (\delta(x)\theta(-t)\cos(t)) * \mathcal{E}(t,x)$. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ и произвольной 1–срезки $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\langle u(t,x), \varphi(t,x)\rangle = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \cos(t)\, \eta\left(\tfrac{t}{R}, 0\right) \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-\tau)}}\right) e^{\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}\, \varphi(t+\tau,\xi) \boxed{=}$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то существует $C > 0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta)| \leq \frac{C}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Далее, существует $M > 0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta)| \leq M$. Тогда для $t < 0$, $\tau < 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ получаем

$$\left|\cos(t)\eta(t/R,0)\varphi(t+\tau,\xi)\frac{e^{\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}}{\sqrt{-\tau}}\right| \leq \frac{M\,C\,e^{\tau}}{(1+t^2)(1+\xi^2)\sqrt{-\tau}} \in \mathbb{L}_1\left(t<0, \tau<0, \xi \in \mathbb{R}\right).$$

Так как $\eta(t/R,0) \to 1$ при $R \to +\infty$, то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, получаем

$$\boxed{=} \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \cos(t) \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(-\tau)}}\right) e^{\tau+i\xi+i\frac{\xi^2}{4\tau}}\, \varphi(t+\tau,\xi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} dt\, \cos(t) \int\limits_{-\infty}^{t} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi(t-\zeta)}}\right) e^{\zeta-t+i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}\, \varphi(\zeta,\xi) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} d\zeta \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\, \varphi(\zeta,\xi) \int\limits_{\zeta}^{0} dt \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\cos(t)}{\sqrt{4\pi(t-\zeta)}}\right) e^{\zeta-t+i\xi+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}} =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi}}\right)\theta(-\zeta)e^{i\xi+\zeta} \int\limits_{\zeta}^{0} \frac{e^{-t+i\frac{\xi^2}{4(\zeta-t)}}\cos(t)}{\sqrt{t-\zeta}}\, dt\,, \varphi(\zeta,\xi)\right\rangle.$$

---

4. 5 В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ рассматривается оператор

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} - 2.$$

а) 1 Доказать, что оператор L имеет единственную функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$;

б) 2 Вычислить функцию Грина $\mathcal{E}(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ оператора L;

в) 2 Найти решение $u(x,y,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$Lu(x,y,z) = \theta(y-z)\delta(x-z).$$

Ответ: $\mathcal{E}(x,y,z) = -e^{-2x}\theta(x)\delta(y-x)\delta(z+x)$, $u(x,y,z) = -\frac{\theta(y-x)\theta(x-z)}{2}\exp(z-x)$.

Решение: а) Уравнение $L\mathcal{E}(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ равносильно $P_L(\tau,\xi,\zeta)\mathcal{F}[\mathcal{E}(x,y,z)](\tau,\xi,\zeta) = 1$, где

$$P_L(\tau,\xi,\zeta) = i\tau + i\xi - i\zeta - 2, \quad |P_L(\tau,\xi,\zeta)| \geq 2 \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R},\ \zeta \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, оператор L в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ имеет единственную функцию Грина

$$\mathcal{E}(x,y,z)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{P_L(\tau,\xi,\zeta)}\right](x,y,z).$$

б) Применяя к уравнению $L\mathcal{E}(x,y,z)=\delta(x,y,z)$ преобразование Фурье по y и z, получаем

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+i(\xi-\zeta)-2\right)F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta)=\delta(x).$$

Следовательно,

$$F_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z](\xi,\zeta)=-e^{-2x+ix(\xi-\zeta)}\theta(x).$$

Тогда для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ получаем

$$\langle\mathcal{E}(x,y,z),\varphi(x,y,z)\rangle=\left\langle\mathcal{F}_{y,z}[\mathcal{E}(x,y,z)](\xi,\zeta),\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right\rangle=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}dx\,\left(-e^{-2x}\right)\int\limits_{\mathbb{R}}d\xi\,e^{ix\xi}\int\limits_{\mathbb{R}}d\zeta\,e^{-ix\zeta}\,\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}dx\,\left(-e^{-2x}\right)\,\mathcal{F}_{\xi,\zeta}\left[\mathcal{F}^{-1}_{y,z}[\varphi(x,y,z)](\xi,\zeta)\right](x,-x)=\int\limits_0^{+\infty}dx\,\left(-e^{-2x}\right)\,\varphi(x,x,-x)=$$
$$=\left\langle-e^{-2x}\theta(x)\delta(y-x)\delta(z+x),\varphi(x,y,z)\right\rangle.$$

в) Решением уравнения является функция

$$u(x,y,z)=\big(\theta(y-z)\delta(x-z)\big)*\mathcal{E}(x,y,z)=\big(\theta(y-z)\delta(x-z)\big)*\big(-e^{-2x}\theta(x)\delta(y-x)\delta(z+x)\big).$$

Для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и произвольной 1–срезки $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем:

$$\langle u(x,y,z),\varphi(x,y,z)\rangle=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{y-z>0}dy\,dz\,\eta\left(\tfrac{z}{R},\tfrac{y}{R},\tfrac{z}{R}\right)\int\limits_0^{+\infty}d\xi\,\left(-e^{-2\xi}\right)\,\varphi(z+\xi,y+\xi,z-\xi)\boxed{=}$$

В силу вложения $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, существует $C>0$, такое, что

$$|\varphi(\alpha,\beta,\gamma)|\le\frac{C}{(1+(\alpha-\beta)^2)(1+(\alpha+\gamma)^2)}\qquad\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\quad\forall\,\beta\in\mathbb{R},\quad\forall\,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Далее, существует $M>0$, такое, что $|\eta(\alpha,\beta,\gamma)|\le M$. Следовательно,

$$\left|\eta\left(\tfrac{z}{R},\tfrac{y}{R},\tfrac{z}{R}\right)e^{-2\xi}\,\varphi(z+\xi,y+\xi,z-\xi)\right|\le\frac{M\,C\,e^{-2\xi}}{(1+(y-z)^2)(1+4z^2)}\in\mathbb{L}_1(y-z>0,z\in\mathbb{R},\xi>0)$$

Так как $\eta\left(\tfrac{z}{R},\tfrac{y}{R},\tfrac{z}{R}\right)\to1$ при $R\to+\infty$, то, по теореме Лебега, получаем:

$$\boxed{=}\int\limits_{y-z>0}dx\,dz\int\limits_0^{+\infty}d\xi\,\left(-e^{-2\xi}\right)\,\varphi(z+\xi,y+\xi,z-\xi)\boxed{=}$$

Сделав замену переменных интегрирования

$$\alpha=z+\xi,\quad\beta=y+\xi,\quad\gamma=z-\xi,$$

получаем

$$y-z=\beta-\alpha>0,\quad \xi=\frac{\alpha-\gamma}{2}>0,\quad \left|\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(x,y,z)}\right|=2,$$

откуда находим, что

$$\boxed{=}\int\limits_{\substack{\beta-\alpha>0\\ \alpha-\gamma>0}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, \left(-\frac{\exp(\gamma-\alpha)}{2}\right)\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\left\langle -\frac{\theta(y-x)\theta(x-z)}{2}\exp(z-x)\,,\,\varphi(x,y,z)\right\rangle.$$

5.(6) Рассматривается линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,4]\to\mathbb{L}_2[0,4]$ вида

$$(Af)(x)=\int\limits_0^x t(3x-2)f(t)\,dt+\int\limits_x^4 x(3t-2)f(t)\,dt,\quad x\in[0,4],\quad f\in\mathbb{L}_2[0,4].$$

а)(1) Доказать, что оператор A компактен, самосопряжён и взаимно однозначен;

б)(2) Найти спектральное разложение оператора A;

в)(1) Найти область определения и спектральное разложение оператора $T=\operatorname{arctg}(A^{-1})$;

г)(2) Выяснить, для каких функций $v\in\mathbb{L}_2[0,4]$ задача

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t)=Tu(t),\quad t>0,\quad u(t)\in D(T),\quad u(0)=v.$$

имеет решение $u(t)$. Найти это решение.

Ответ: а) $\operatorname{Ker}A=\big(\operatorname{Im}A\big)^{\perp}\subset\Big(A\big(C[0,4]\big)\Big)^{\perp}=\{0\}$, так как

$A\big(C[0,4]\big)=\{\ g\in C^2[0,4]\ :\ g(0)=0,\ 10g'(4)=3g(4)\ \}$ — всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,4]$.

б) $A=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n$, где

$\lambda_0>0$ — единственное решение уравнение $\operatorname{th}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{\lambda}}$,

$\lambda_n<0$ при $n\in\mathbb{N}$ — решения уравнения $\operatorname{tg}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{-\lambda}}$,

P_0 — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda_0}}\right)$,

P_n при $n\in\mathbb{N}$ — ортопроектор на $\operatorname{Lin}\left(\sin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda_n}}\right)$;

в) $D(T)=\mathbb{L}_2[0,4],\quad T=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda_n}\right)P_n$;

г) Для любой функции $v\in D(T)=\mathbb{L}_2[0,4]$ существует решение

$u(t)=\exp(tT)v=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp\left(t\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda_n}\right)P_nv.$

Решение: а) Оператор A является интегральным оператором вида

$$(Af)(x)=\int\limits_0^4 K(t,x)\,f(t)\,dt,\quad f\in\mathbb{L}_2[0,4],\quad x\in[0,4],$$

где функция $K(t,x) \in C\big([0,4]\times[0,4]\big)$ имеет вид

$$K(t,x) = \begin{cases} t(3x-2), & 0 \le t \le x \le 4, \\ x(3t-2), & 0 \le x \le t \le 4. \end{cases}$$

Следовательно, оператор A является компактным. Далее, функция $K(t,x)$ имеет вещественные значения и симметрична: $K(t,x) = K(x,t)$ для всех $t,x \in [0,4]$. Следовательно, оператор A является самосопряжённым. Далее, докажем, что $\operatorname{Im} A$ всюду плотен в $\mathbb{L}_2[0,4]$. Тогда $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0\}$, то есть оператор A инъективен. Действительно, $\operatorname{Im} A \supset A\big(C[0,4]\big)$. Так как очевидно вложение $A\big(C[0,4]\big) \subset C^1[0,4]$, то для функции $f \in C[0,4]$ равенство $g = Af$ равносильно

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \int\limits_0^x 3t\, f(t)\, dt + \int\limits_x^4 (3t-2)\, f(t)\, dt, \quad x \in [0,4].$$

Следовательно, $g \in C^2[0,4]$, и выполнены равенства

$$g'(4)/3 = g(4)/10 = \int\limits_0^4 t f(t)\, dt, \quad g''(x) = 2f(x), \quad x \in [0,4].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$A\big(C[0,4]\big) = \big\{\ g \in C^2[0,4]\ :\ g(0) = 0,\ \ 10g'(4) = 3g(4)\ \big\}$$

то есть множество $A\big(C[0,4]\big)$ всюду плотно в $\mathbb{L}_2[0,4]$, что влечёт всюду плотность можества значений $\operatorname{Im} A$.

б) Так как $\operatorname{Ker} A = 0$, то все собственные значения A нетривиальны. В силу самосопряжённости A, все его собственные значения вещественны. Пусть вещественное $\lambda \ne 0$ — собственное значение A, а функция $f \in \operatorname{Ker} A_\lambda \backslash \{0\}$, то есть $Af = \lambda f$. Так как очевидно вложение $\operatorname{Im} A \subset$ $\subset C[0,4]$, то $f = \frac{1}{\lambda} Af \in C[0,4]$, откуда сразу следует $f \in A\big(C[0,4]\big)$, то есть $f \in C^2[0,4]$ и

$$\lambda f''(x) = 2f(x), \quad x \in [0,4], \quad f(0) = 0, \quad 10f'(4) = 3f(4).$$

Если $\lambda > 0$, то $f(x) = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda}}$, где

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ch} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = 3 \operatorname{sh} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{th}(2\mu) = \frac{5}{3}\,\mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\mu_0 > 0$, то есть $\lambda_0 = \frac{8}{\mu_0^2} > 0$ единственное положительное собственное значение оператора A. Ему соответствует собственная функция

$$h_0(x) = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\lambda_0}} = \operatorname{sh} \frac{\mu_0 x}{2}.$$

Если $\lambda < 0$, то $f(x) = \sin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda}}$, где

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} \cos \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} = 3 \sin \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{-\lambda}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(2\mu) = \frac{5}{3}\,\mu \quad \text{для} \quad \mu = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda}} > 0.$$

Это уравнение имеет счётное множество решений $\{\ \mu_n > 0 :\ n \in \mathbb{N}\ \}$. Именно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный корень $\mu_n \in \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем собственное значение $\lambda_n = -\frac{8}{\mu_n^2}$ и соответсвующую ему собственную функцию

$$h_n(x) = \sin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{-\lambda_n}} = \sin\frac{\mu_n x}{2}.$$

Так как оператор A компактен и самосопряжён, то, по теореме Гильберта—Шмидта, найденная система его собственных функций $\{h_n\ :\ n \in \mathbb{N}_0\ \}$ образует в пространстве $\mathbb{L}_2[0,4]$ ортогональный базис. Следовательно, для любой функции $f \in \mathbb{L}_2[0,4]$ справедливы равенства:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n f, \qquad Af = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, P_n f,$$

где P_n — ортопроектор на $\mathrm{Lin}\{h_n\}$. Последнее равенство является спектральным разложением оператора A.

в) Самосопряжённый оператор $A^{-1}\colon \mathrm{Im}\, A \to \mathbb{L}_2[0,4]$ имеет область определения

$$D(A^{-1}) = \mathrm{Im}\, A = \left\{\ g \in \mathbb{L}_2[0,4]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|P_n g\|_2^2}{\lambda_n^2} < +\infty\ \right\}$$

и спектральное разложение

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n g}{\lambda_n}, \qquad g \in \mathrm{Im}\, A.$$

Следовательно, по определению функции от самосопряжённого оператора, для оператора $T = \mathrm{arctg}\,(A^{-1}) : D(T) \to \mathbb{L}_2[0,4]$ имеем область определения

$$D(T) = \left\{\ f \in \mathbb{L}_2[0,4]\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 < +\infty\ \right\}.$$

и спектральное разложение

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n f, \qquad f \in D(T).$$

Так как $\left|\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda_n}\right| \le 2$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то для любой $f \in \mathbb{L}_2[0,4]$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{\lambda_n}\right)^2 \|P_n f\|_2^2 \le 4 \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n f\|_2^2 = 4\|f\|_2^2 < +\infty, \quad \Rightarrow \quad D(T) = \mathbb{L}_2[0,4].$$

г) Решением является функция

$$u(t) = \exp(tT)v = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(t\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{\lambda_n}\right) P_n v, \qquad t \ge 0,$$

при условии $v \in D(T) = \mathbb{L}_2[0,4]$.

6. ④ Область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0, \ \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Оператор Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет область определения

$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2\left(\overline{G}\right) \ : \ f\big|_{\partial G} = 0 \right\}.$$

а) ② Найти область определения и спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}$;

б) ② Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + \operatorname{sh}(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right), \quad u(0) = \frac{\partial}{\partial t} u(0) = 0.$$

Решение: а) В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, имеем ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathbb{L}_2(G)$ вида $\{ e_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)\sin(n\varphi) \ : \ n, m \in \mathbb{N} \} \subset D(\Delta)$, причём $\Delta e_{n,m} = -\mu_{n,m}^2 e_{n,m}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда область определения $\overline{\Delta}$ имеет вид

$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \left\{ f \in \mathbb{L}_2(G) \ : \ \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 \|P_{n,m} f\|_2^2 < +\infty \right\},$$

где $P_{n,m}$ — ортопроектор в $\mathbb{L}_2(G)$ на $\operatorname{Lin}\{e_{n,m}\}$, то есть $P_{n,m} f = \frac{(f\,,\, e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\, e_{n,m})} e_{n,m}$ для $f \in \mathbb{L}_2(G)$, а спектральное разложение оператора $\overline{\Delta}\colon D\left(\overline{\Delta}\right) \to \mathbb{L}_2(G)$ имеет вид

$$\overline{\Delta} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^2 P_{n,m}.$$

б) Функцию $f \in \mathbb{L}_2(G)$, тождественно равную 1 на G, разложим в ряд Фурье по ортогональному базису $\{ e_{n,m} : n, m \in \mathbb{N} \}$:

$$f = \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{n,m} f = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} e_{n,m}, \quad \text{где} \quad a_{n,m} = \frac{(f\,,\, e_{n,m})}{(e_{n,m}\,,\, e_{n,m})}, \quad \|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2.$$

Решение $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) e_{n,m}, \quad \text{а} \quad u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 < +\infty,$$

$$\ddot{u}_{n.m}(t) = -\mu_{n,m}^2 u_{n,m}(t) + a_{n,m}\operatorname{sh}(t), \quad t > 0, \quad u_{n,m}(0) = \dot{u}_{n,m}(0) = 0.$$

Тогда

$$u_{n,m}(t) = \left(\frac{a_{n,m}}{\mu_{n,m}^2 + 1}\right)\left(\operatorname{sh}(t) - \frac{\sin(\mu_{n,m} t)}{\mu_{n,m}}\right), \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедливо неравенство

$$|u_{n,m}(t)| \leq \frac{2\operatorname{sh}(t)|a_{n,m}|}{\left(\mu_{n,m}^2 + 1\right)}, \quad t \geq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда вложение $u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right)$ при $t > 0$ следует из оценки

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_{n,m}^4 |u_{n,m}(t)|^2 \|e_{n,m}\|_2^2 \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4\operatorname{sh}^2(t)\mu_{n,m}^4}{\left(\mu_{n,m}^2 + 1\right)^2} a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} O\left(a_{n,m}^2 \|e_{n,m}\|_2^2\right) < +\infty.$$

7. 4 Найти решение $u(x) \in C^2(|x|<1) \cap C(|x| \le 1)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, задачи

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < 1;$$

$$u(x)\big|_{|x|=1} = x_2^2 x_3.$$

Ответ: $u = -\frac{r^3}{2}\, Y_{3,2} + \frac{r^3}{10}\, Y_{3,0} + \frac{r}{5}\, Y_{1,0} = \frac{x_3}{5}\left(4x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + 1\right)$, где
$Y_{3,0} = -5\cos^3\theta + 3\cos\theta, \quad Y_{1,0} = \cos\theta, \quad Y_{3,2} = \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi.$

Решение: В сферических координатах

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

при $|x| = r = 1$ имеем $x_2^2 x_3 = \sin^2\theta\cos\theta\sin^2\varphi = -\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\cos\theta.$

$$P_3{}''(\tau) = C_{3,2}\left((1-\tau^2)^3\right)^{(V)} = \tau, \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi = \sin^2\theta\, P_3{}''(\cos\theta)\cos 2\varphi = Y_{3,2}.$$

Представим $\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\cos\theta$ линейной комбинацией функций $P_n(\cos\theta)$ по $n \ge 1$. Имеем

$$P_3(\tau) = C_{3,0}\cdot\left((1-\tau^2)^3\right)''' = C_{3,0}\cdot(-6\cdot5\cdot4\cdot\tau^3 + 3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot\tau) = \underbrace{C_{3,0}\cdot 6\cdot 4}_{=1}\cdot\left(-5\tau^3 + 3\tau\right) = -5\tau^3 + 3\tau.$$

$$P_1(\tau) = C_{1,0}\cdot\left(1-\tau^2\right)' = \underbrace{-C_{1,0}\cdot 2}_{=1}\cdot\tau = \tau.$$

Следовательно,

$$\frac{\tau - \tau^3}{2} = \frac{1}{10}\left(P_3(\tau) - 3P_1(\tau)\right) + \frac{1}{2}P_1(\tau) = \frac{1}{10}P_3(\tau) + \frac{1}{5}\,P_1(\tau).$$

Тогда

$$x_1^2 x_3 = -\frac{1}{2}\,Y_{3,2} + \frac{1}{10}\,Y_{3,0} + \frac{1}{5}\,Y_{1,0},$$

где

$$Y_{3,0} = -5\cos^3\theta + 3\cos\theta, \quad Y_{1,0} = \cos\theta, \quad Y_{3,2} = \sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi.$$

Тогда решение

$$u = -\frac{r^3}{2}\,Y_{3,2} + \frac{r^3}{10}\,Y_{3,0} + \frac{r}{5}\,Y_{1,0} = \frac{x_3}{5}\left(4x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + 1\right).$$
