2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 1

1. ④ $(0;2)$ – седло, $\lambda_1 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -2$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$(0;-2)$ – устойчивый фокус, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{7}$.

2. ③ $y = C_1 e^{\sqrt{x}} + C_2 e^{-\sqrt{x}} - x$.

3. ⑤ $y = \sqrt{2x+1}$.

4. ⑤ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x + y_0$, где $y_0 = \begin{cases} \frac{1}{20} x \cos x, & a = 2, \\ -\frac{1}{20} x \cos x, & a = -2, \\ \frac{1}{(a^2+1)(a^2-4)} \sin ax, & a \neq \pm 2 \end{cases}$.

5. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}(C_1 + \frac{1}{2}(\cos 2t + \ln|\operatorname{tg} t|)) \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + e^{2t}(C_2 + \frac{1}{2}\sin 2t) \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$.

6. ⑤ $y = \ln x - 1$ – особое решение, $y = \ln C - \frac{C}{x}$, $C > 0$.

7. ⑤ Допустимая экстремаль $y = \frac{9}{4}x$. Не дает экстремум.

8. ⑤ $u = F\left(\frac{(z+y)^3}{z-y}, e^{-x}(y+z)\right)$, $\quad u_0 = \frac{e^{3x}}{z-y}$.

9. ④ 1) Так как e^{tA} – фундаментальная матрица системы, то $W(t) = C \det e^{tA} = Ce^{-2t}$. Константу C находим из начальных условий. Ответ: $W(t) = e^{-2t}$.

2) Пусть $u = u(x_1, x_2)$ – первый интеграл системы. Через каждую точку плоскости проходит фазовая траектория $(x_1(t), x_2(t))$ и по определению $u(x_1(t), x_2(t)) = C$. Так как $(x_1(t), x_2(t)) \to (0,0)$ при $t \to -\infty(+\infty)$, то $C = u(0,0)$. Следовательно, $u(x_1, x_2) = u(0,0)$. Ответ: только константы.

2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 2

1. ④ $(0;-4)$ – седло, $\lambda_1=2$, $h_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\lambda_2=-6$, $h_2=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$;

$(3;0)$ – устойчивый узел, $\lambda_1=-4$, $h_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda_2=-3$, $h_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

2. ③ $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+1$.

3. ⑤ $y=e^{\sqrt{2\sin x}-1}$.

4. ⑤ $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\sin 3x+C_4\cos 3x+y_0$, где $y_0=\begin{cases}\frac{1}{52}xe^{2x}, & a=2,\\ -\frac{1}{52}xe^{-2x}, & a=-2,\\ \frac{1}{(a^2+9)(a^2-4)}e^{ax}, & a\neq\pm 2\end{cases}$.

5. ④ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-2t}(C_1+t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+e^{-2t}(C_2+\ln|\cos t|)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$.

6. ⑤ $y=\pm e^x$ – особые решения, $y=\frac{1}{2}\left(Ce^{2x}+\frac{1}{C}\right)$, $C\neq 0$.

7. ⑤ Допустимая экстремаль $y=e^{2x}$. Не дает экстремум.

8. ⑤ $u=F\left(\frac{z}{x},\frac{y^2-x^2}{xy^2}\right)$, $u_0=\frac{3zy^2}{x^2-y^2}$.

9. ④ 1) По свойству $\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$ имеем $A=\frac{d}{dt}e^{tA}|_{t=0}=\begin{pmatrix}1&-4\\1&1\end{pmatrix}$.

2) Заменой $\tau=\frac{t^3}{3}$ сводим к линейной системе с постоянными коэффициентами $\dot{\overline{y}}=A\overline{y}$, $\overline{y}=\overline{y}(\tau)$, ее решения $\overline{y}=e^{\tau A}\overline{C}$. Ответ: $\overline{x}(t)=e^{\frac{t^3}{3}A}\overline{C}$.

2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 3

1. ④ $(-1;-2)$ – седло, $\lambda_1 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -2$, $h_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;

$(1;2)$ – устойчивый фокус, $\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

2. ③ $y = C_1\frac{e^x}{x} + C_2\frac{e^{-x}}{x} - x$.

3. ⑤ $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$.

4. ⑤ $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} + C_3\sin x + C_4\cos x + y_0$, где $y_0 = \begin{cases} -\frac{1}{34}x\sin x, & a = \pm 1, \\ \frac{1}{(a^2-1)(a^2+16)}\cos ax, & a \neq \pm 1 \end{cases}$.

5. ④ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = e^t\left(C_1 + \sin t + \ln\frac{|\cos t|}{1+\sin t}\right)\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix} + e^t(C_2 - \cos t)\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$.

6. ⑤ $y = ex$ – особое решения, $y = \frac{1}{C}e^{Cx}$, $C \neq 0$.

7. ⑤ Допустимая экстремаль $y = 8$. Не дает экстремум.

8. ⑤ $u = F\left(\frac{(3y-2x)^2}{y-x}, (y-x)e^{2z}\right)$, $\quad u_0 = (3y-2x)^2e^{2z}$.

9. ④ 1) Так как e^{tA} – фундаментальная матрица системы, то $W(t) = C\det e^{tA} = Ce^{2t}$. Константу C находим из начальных условий. Ответ: $W(t) = 3e^{2t}$.

2) Пусть $u = u(x_1, x_2)$ – первый интеграл системы. Через каждую точку плоскости проходит фазовая траектория $(x_1(t), x_2(t))$ и по определению $u(x_1(t), x_2(t)) = C$. Так как $(x_1(t), x_2(t)) \to (0,0)$ при $t \to -\infty(+\infty)$, то $C = u(0,0)$. Следовательно, $u(x_1, x_2) = u(0,0)$. Ответ: только константы.

2015–2016 учебный год, 2 семестр

Вариант 4

1. ④ $(0;8)$ – седло, $\lambda_1 = 4$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -2$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$(4;0)$ – неустойчивый узел, $\lambda_1 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 4$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. ③ $y = C_1 \sin(x^2) + C_2 \cos(x^2) + 1$.

3. ⑤ $y = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

4. ⑤ $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x + y_0$, где $y_0 = \begin{cases} \frac{1}{78} x e^{3x}, & a = 3, \\ -\frac{1}{78} x e^{-3x}, & a = -3, \\ \frac{1}{(a^2+4)(a^2-9)} e^{ax}, & a \neq \pm 3 \end{cases}$.

5. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t}(C_1 + t) \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + e^{-t}(C_2 + \frac{1}{2} \ln|\sin 2t|) \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$.

6. ⑤ $y = \pm x^2$ – особые решения, $y = \frac{C}{4} x^4 + \frac{1}{C}$, $C \neq 0$.

7. ⑤ Допустимая экстремаль $y = \frac{1}{8} \cos x$. Не дает экстремум.

8. ⑤ $u = F\left(xy, \frac{3z-2x}{zx^2}\right)$, $\quad u_0 = \frac{y(3z-2x)}{xz}$.

9. ④ 1) По свойству $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ имеем $A = \frac{d}{dt} e^{tA}|_{t=0} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2) Заменой $\tau = \ln t$ сводим к линейной системе с постоянными коэффициентами $\dot{\overline{y}} = A\overline{y}$, $\overline{y} = \overline{y}(\tau)$, ее решения $\overline{y} = e^{\tau A}\overline{C}$. Ответ: $\overline{x}(t) = e^{\ln t A}\overline{C}$