

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} (x^2 - 4)u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = 4y, \quad u_x|_{x=0} = 8y^2, & & y > 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \operatorname{sh}x + \operatorname{arctg}x, \quad u_t|_{t=0} &= \operatorname{ch}x - \frac{2}{1+x^2}, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} = \operatorname{cht} + 1, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} 9u_t &= 4u_{xx} - (70x + \pi)e^{-4t}, & 0 < x < \pi/2, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 2x + \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2; \\ u_x|_{x=0} &= 2 \cdot e^{-4t}, \quad u|_{x=\pi/2} = \pi \cdot e^{-4t}, & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 3\Delta u - 3t^2 e^{-2x} \sin(y - 2z), & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 2\sqrt[3]{1 + (x - y + z)^2}, & x, y, z \in \mathbb{R}; \\ u_t|_{t=0} &= 12(x - y + z)e^{-(x-y+z)^2} + x^2 - 2y^2 + 3z^2, & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u &= 12r, & 1 < r < 2; \\ (u - u_r)|_{r=1} &= 4 + 3\sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad u|_{r=2} = 11, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех λ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \sin y + \sin 3x) u(y) dy + \sin x.$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + \sin \mu_{01} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= J_0(\mu_{01} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где μ_{01} – первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(r)$.

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$u_{xx} - 2(2x+1)u_{xy} + 4x(x+1)u_{yy} - 2u_y = 0, \quad x, y > 0;$$

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$2u_{tt} - u_{xt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \sin x + \operatorname{th} 2x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2x}, \quad x \geq 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \cos t + 2, \quad t \geq 0.$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$u_{tt} = \pi^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi \sin \pi t, \quad t \geq 0.$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$u_t = \frac{1}{2} \Delta u + 5 \sin t \cdot \sin(x+2y) \cdot \operatorname{ch} z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = (z + yz^3) e^{-x^2 + 2x}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\Delta u = 8/r, \quad 1/2 < r < 1;$$

$$u|_{r=1/2} = 6, \quad (u + u_r)|_{r=1} = 10 - 17 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех λ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} 2x) u(y) dy + \operatorname{ch} 2x$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u - \cos \mu_{02} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{02} r), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где μ_{02} – второй положительный нуль функции Бесселя $J_0(r)$.

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = 2y, & & y > 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_{xt} - 3u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = x + \operatorname{ch}x, \quad u_t|_{t=0} = \operatorname{sh}x - 3, & & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} = \operatorname{sh}t + \frac{1}{1+9t^2}, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} 3u_t = 9u_{xx} + (\pi - 10x)e^{-3t}, & & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = x + \cos 2x, & & 0 \leq x \leq \pi; \\ u_x|_{x=0} = e^{-3t}, \quad u_x|_{x=\pi} = e^{-3t}, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} = 2\Delta u + 5e^{-(t+\sqrt{3}y)} \cos(2x-z), & & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = 2\sqrt{3+(x-y)^2}, & & x, y, z \in \mathbb{R}; \\ u_t|_{t=0} = \frac{8}{1+(x-y)^2} + (x^2+y^2)z, & & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u = 6, & & 1 < r < 2; \\ (u - u_r)|_{r=1} = -1 - 6\sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 7, & & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех λ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x \sin 3y - \sin x) u(y) dy + \sin 3x .$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u - \sin \mu_{02} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= J_0(\mu_{02} r), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0; \end{aligned}$$

где μ_{02} – второй положительный нуль функции Бесселя $J_0(r)$.

1.(6) Решить задачу и указать наибольшую область единственности решения

$$\begin{aligned} u_{xx} - 4(x+1)u_{xy} + 4x(x+2)u_{yy} - 2u_y &= 0, & x, y > 0; \\ u|_{x=0} = 5y, \quad u_x|_{x=0} = 4y, & & 0 < y < 1. \end{aligned}$$

2.(5) Решить смешанную задачу для полупрямой

$$\begin{aligned} 3u_{tt} - 2u_{xt} - u_{xx} &= 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \cos x + 3x, \quad u_t|_{t=0} &= -\sin x - 1, & x \geq 0; \\ u_x|_{x=0} = \frac{3}{\operatorname{ch}^2 t} - \sin t, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

3.(6) Найти формальное решение смешанной задачи для отрезка

$$\begin{aligned} u_{tt} = e^2 u_{xx}, & & 0 < x < \pi/2, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = e \cdot \sin 3x, & & 0 \leq x \leq \pi/2; \\ u|_{x=0} = \pi \cdot \cos et, \quad u_x|_{x=\pi/2} = -2 \cos et, & & t \geq 0. \end{aligned}$$

4.(5) Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t = 2\Delta u + 17 \cos t \cdot \operatorname{sh}(y-z) \cdot \cos 2x, & & x, y, z \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = (xy^2 - yx^3) e^{-z^2 - 4z}, & & x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.(4) Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\begin{aligned} \Delta u = 2/r^4, & & 1/2 < r < 1, \\ u|_{r=1/2} = 7, \quad (u + u_r)|_{r=1} = \cos \theta, & & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

6.(4) Найти характеристические числа и собственные функции ядра. Решить интегральное уравнение для тех λ , когда решение существует

$$u(x) = \lambda \int_{-1/2}^{1/2} (x \operatorname{sh} 2y - \operatorname{sh} x) u(y) dy + \operatorname{ch} x.$$

7.(4) Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + \cos \mu_{01} t, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{01} r), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ |u|_{r=0} &< \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где μ_{01} – первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(r)$.