

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Дифференциальные уравнения**

Курс **2**

Семестр **4**

2015–2016 учебный год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найдите положения равновесия системы, определите их тип и нарисуйте фазовые траектории линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 + xy - y^2, \\ \dot{y} = e^{-2x} - 1. \end{cases}$$

2. ③ Найдите общее решение уравнения

$$4xy'' + 2y' - y = x - 2, \quad x > 0,$$

если известны два его решения $y_1 = -x$, $y_2 = e^{\sqrt{x}} - x$.

3. ⑤ Решите задачу Коши

$$3yy'' + 2y^3(y')^5 + (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

4. ⑤ Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} + 3y'' - 4y = \sin ax$$

при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$.

5. ④ Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^{2t} \operatorname{ctg} 2t, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

6. ⑤ Найдите все решения уравнения, исследуйте особые решения и нарисуйте интегральные кривые

$$y + xy' = \ln(y'x^2), \quad x > 0.$$

7. ⑤ Найдите экстремали и исследуйте на экстремум функционал

$$\int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - \frac{4}{9}y^2 + 2xy \right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(4\pi) = 9\pi.$$

8. ⑤ Найдите общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (2y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (2z - y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решите задачу Коши $u = \frac{1}{y}e^{3x}$ при $z = 2y$, $y > 0$.

9. ④ Пусть $e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + 3t & 9t \\ -t & 1 - 2t \end{pmatrix}$.

- 1) Найдите вронскиан $W(t)$ решений системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условию $W(0) = 1$.
- 2) Найдите первые интегралы этой системы, определенные на всей плоскости.

МФТИ — 61

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Дифференциальные уравнения**

Курс **2**

Семестр **4**

2015–2016 учебный год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найдите положения равновесия системы, определите их тип и нарисуйте фазовые траектории линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{12+3y-4x} - 1, \\ \dot{y} = -yx. \end{cases}$$

2. ③ Найдите общее решение уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = x, \quad x > 0,$$

если известны два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{\sin x}{x} + 1$.

3. ⑤ Решите задачу Коши

$$y^2 y'' \cos x + (y')^3 - (y')^2 y \cos x + y^2 y' \sin x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. ⑤ Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} + 5y'' - 36y = e^{ax}$$

при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$.

5. ④ Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \frac{e^{-2t}}{\cos t}, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

6. ⑤ Найдите все решения уравнения, исследуйте особые решения и нарисуйте интегральные кривые

$$2y = y' + \frac{e^{2x}}{y'}.$$

7. ⑤ Найдите экстремали и исследуйте на экстремум функционал

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - 25y^2 + 58ye^{2x}] dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^\pi.$$

8. ⑤ Найдите общее решение уравнения

$$2x^3 \frac{\partial u}{\partial x} + (y^3 + x^2 y) \frac{\partial u}{\partial y} + 2x^2 z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решите задачу Коши $u = z$ при $x = 2y$, $y > 0$.

9. ④ Пусть $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -2 \sin 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$.

1) Найдите матрицу A .

2) Найдите решения системы $\dot{\vec{x}} = t^2 A \vec{x}$.

МФТИ — 62

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Дифференциальные уравнения**

Курс **2**

Семестр **4**

2015–2016 учебный год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найдите положения равновесия системы, определите их тип и нарисуйте фазовые траектории линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy + x^2, \\ \dot{y} = \operatorname{sh}(2x - y). \end{cases}$$

2. ③ Найдите общее решение уравнения

$$xy'' + 2y' - xy = x^2 - 2, \quad x > 0,$$

если известны два его решения $y_1 = -x$, $y_2 = \frac{e^x}{x} - x$.

3. ⑤ Решите задачу Коши

$$y^2 y'' + (y')^3 + y(y')^2 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -1.$$

4. ⑤ Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} - 15y'' - 16y = \cos ax$$

при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$.

5. ④ Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + y + e^t \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

6. ⑤ Найдите все решения уравнения, исследуйте особые решения и нарисуйте интегральные кривые

$$y = \frac{xy'}{\ln y'}.$$

7. ⑤ Найдите экстремали и исследуйте на экстремум функционал

$$\int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - \frac{9}{16}y^2 + 9y \right] dx, \quad y(0) = 8, \quad y(2\pi) = 8.$$

8. ⑤ Найдите общее решение уравнения

$$(3y - 4x) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - 2x) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решите задачу Коши $u = 16x^2 e^{2z}$ при $y = 2x$, $x > 0$.

9. ④ Пусть $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & 4t \\ -t & 1 - 2t \end{pmatrix}$.

1) Найдите вронскиан $W(t)$ решений системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условию $W(0) = 1$.

2) Найдите первые интегралы этой системы, определенные на всей плоскости.

МФТИ — 63

«Использование электронных средств любых типов и вспомогательных материалов запрещено»

С положением ознакомлен: _____ (Подпись студента)

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Дифференциальные уравнения**

Курс **2**

Семестр **4**

2015–2016 учебный год

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найдите положения равновесия системы, определите их тип и нарисуйте фазовые траектории линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 8, \\ \dot{y} = \arctg(yx). \end{cases}$$

2. ③ Найдите общее решение уравнения

$$xy'' - y' + 4x^3y = 4x^3, \quad x > 0,$$

если известны два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = 1 + \cos(x^2)$.

3. ⑤ Решите задачу Коши

$$2xy^2y'' + 2x^3(y')^3 - 2xy(y')^2 + y^2y' = 0, \quad y(1) = \frac{1}{e^2}, \quad y'(1) = \frac{1}{e^2}.$$

4. ⑤ Найдите все действительные решения уравнения

$$y^{IV} - 5y'' - 36y = e^{-ax}$$

при всех значениях параметра $a \in \mathbb{R}$.

5. ④ Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + \frac{e^{-t}}{\sin 2t}. \end{cases}$$

6. ⑤ Найдите все решения уравнения, исследуйте особые решения и нарисуйте интегральные кривые

$$4y = xy' + \frac{4x^3}{y'}.$$

7. ⑤ Найдите экстремали и исследуйте на экстремум функционал

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - 9y^2 + 2y \cos x] dx, \quad y(0) = \frac{1}{8}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

8. ⑤ Найдите общее решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + (3z^2 - xz) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решите задачу Коши $u = \frac{y}{x}$ при $z = x$, $x > 0$.

9. ④ Пусть $e^{tA} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

1) Найдите матрицу A .

2) Найдите решения системы $t\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, $t > 0$.