2014–2015 учебный год, 2 семестр

Вариант 1

1. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. ④ Уравнение Эйлера: $y'' = -\pi \sin(\pi x)$; $y'(1) = -1$; $y_0 = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$; $\Delta J(y_0) = \int\limits_0^1 (h')^2\,dx$ абс. минимум.

3. ④ $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{-2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{8} - \frac{\cos 2x}{32}$.

4. ⑤ Точки $(0;0)$, $\left(-\frac{3}{2};3\right)$ – положения равновесия. Точка $(0;0)$ – седло. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -2$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Точка $\left(-\frac{3}{2};3\right)$ – неустойчивый узел. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = 6$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. ⑥ $y = C_1 x^3 + C_2 x^3 e^x + \frac{x^3}{6} e^{3x}$.

6. ⑤ $u = f\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2 - 2x\right)$, $\quad u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x$.

7. ⑤ $y = 2\sqrt{x^2 + 3}$.

8. ⑤ $y = \frac{(C-x)^2}{C}$. Особые решения: $y = 0$, $y = -4x$.

2014–2015 учебный год, 2 семестр

Вариант 2

1. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. ④ Уравнение Эйлера: $y'' = -\cos(\pi x)$; $y'(0) = 1$; $y_0 = \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$; $\Delta J(y_0) = \int\limits_0^1 (h')^2\,dx$ абс. минимум.

3. ④ $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{x}{8} e^{2x} + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8}$.

4. ⑤ Точки $(0;0)$, $(6;12)$ – положения равновесия. Точка $(0;0)$ – седло. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -3$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Точка $(6;12)$ – устойчивый фокус (по часовой стрелке). $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$.

5. ⑥ $y = \frac{C_1 + C_2 e^x}{x^2} + \frac{e^{-2x}}{6x^2}$.

6. ⑤ $u = f\left(x + y, xy - \frac{1}{2} z^2\right)$, $\quad u = x^2 + y^2 + z^2$.

7. ⑤ $y = \frac{1}{1 - \ln x}$.

8. ⑤ $y = \frac{x - C^2}{C}$. Особые решения: $y = \pm 2\sqrt{-x}$.

2014–2015 учебный год, 2 семестр

Вариант 3

1. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. ④ Уравнение Эйлера: $y'' = \sin(\pi x)$; $y'(1) = 0$; $y_0 = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x}{\pi}$; $\Delta J(y_0) = \int\limits_0^1 (h')^2\,dx$ абс. минимум.

3. ④ $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x^3 - \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x}$.

4. ⑤ Точки $(0;0)$, $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ – положения равновесия. Точка $(0;0)$ – неустойчивый фокус (против часовой стрелки). $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Точка $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right)$ – седло. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = 5$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. ⑥ $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 e^x + \frac{x^2}{2} e^{2x}$.

6. ⑤ $u = f\left(xy, \frac{x^2}{2} - xyz\right)$, $\quad u = xyz - \frac{x^2}{2} - 1$.

7. ⑤ $y = -\ln\left(\frac{1}{e} - x\right)$.

8. ⑤ $y = Ce^x + \frac{1}{C}$. Особые решения: $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$.

Вариант 4

1. ④ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. ④ Уравнение Эйлера: $y'' = -\pi \sin(\pi x)$; $y'(0) = 1$; $y_0 = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$; $\Delta J(y_0) = \int\limits_0^1 (h')^2\, dx$ абс. минимум.

3. ④ $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + 2e^{2x} + 4x^2 + \frac{1}{5}(4\sin 2x - 2\cos 2x)$.

4. ⑤ Точки $(0;0)$, $\left(-\frac{9}{2}; -3\right)$ – положения равновесия. Точка $(0;0)$ – неустойчивый узел. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Точка $\left(-\frac{9}{2}; -3\right)$ – седло. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов линеаризованной системы, $\lambda_1 = 3$, $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. ⑥ $y = \frac{C_1 + C_2 e^x}{x^3} + \frac{e^{-3x}}{12x^3}$.

6. ⑤ $u = f\left(y - \frac{x^2}{y}, y^2 + z^2 - x^2\right)$, $\quad u = y^2 + z^2 - x^2 - 1$.

7. ⑤ $y = \ln(x + e)$.

8. ⑤ $y = C(C - x)^2$. Особые решения: $y = 0$, $y = \frac{4x^3}{27}$.