

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **41** Курс **3** Семестр **6** Базовый курс 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$x^4 u_{xx} + x^2 u_{xy} - 2u_{yy} + 2x^3 u_x = 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{y=1} = 3 + \frac{6}{x^2}, \quad u_y|_{y=1} = 6, \quad x > 0.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} - t e^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{x^2}{\pi} \sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi} = -\pi \sin t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = 4 \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2 \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = 1 - 5 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_t = \frac{1}{2} \Delta u + t^2 e^y \cdot \sin(t^3 + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x^2 - y^2) \operatorname{ch}(y - x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{1}{2} x^2 \right) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **42** Курс **3** Семестр **6** Базовый курс 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$u_{xx} + 3x^2u_{xy} + 9x^4u_y + \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)u_x = 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{x=1} = y^2e^{y-1}, \quad u_x|_{x=1} = -3y^2e^{y-1}.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} - x \sin t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x + x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t + 3t^2 + t^3, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (x - 4) \cos 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u|_{x=0} = \cos 2t - 1, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = \frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{e} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1/e} = 1 + \cos \varphi, \quad u|_{r=1} = \cos 2\varphi - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x + z) \operatorname{arctg}(x - z), \quad u_t|_{t=0} = x^2 \cos y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y^2 - 3xy) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **43** Курс **3** Семестр **6** Базовый курс 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2yu_y + xu_x = 0, \quad x > 0, y > 0;$$
$$u|_{x=1} = \frac{1}{y^2} + y - 1, \quad u_x|_{x=1} = 2y - \frac{2}{y^2}, \quad y > 0.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} + (x+1)e^{-t}, \quad t > 0, x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = -1 - x - e^{-x}, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x + u)|_{x=0} = 2 - 2t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2a^2 + x^2 \cos t, \quad t > 0, 0 < x < \pi;$$
$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = 16 \frac{\cos 4\varphi}{r^2}, \quad 1 < r < \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$(u_r + 2u)|_{r=1} = \sin 2\varphi - 2 \cos 4\varphi, \quad u|_{r=\sqrt{2}} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{4} \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_t = \Delta u + t \cos y \operatorname{sh}(x - t^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (z^2 - y^2)e^{y+z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^3 y + y^2) \varphi(y) dy + 3ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **44** Курс **3** Семестр **6** Базовый курс 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков	
Фамилия проверяющего	

Баллы БРС	
Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$u_{xx} - 2(2x + 1)u_{xy} + 4x(x + 1)u_{yy} - 2u_y = 0;$$
$$u|_{x=-1} = y - y^2, \quad u_x|_{x=-1} = 4y.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t - 4t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (2x - \pi - 9) \sin 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi/2} = \sin 3t - 3t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = \frac{12 \sin 2\varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = -6 + 8 \cos \varphi - 3 \sin 2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 - 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y + z) \arcsin(y - z), \quad u_t|_{t=0} = z^2 \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 + x^2) \varphi(y) dy + ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **41** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФАКИ, ФФКЭ, ФУПМ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу $x^4 u_{xx} + x^2 u_{xy} - 2u_{yy} + 2x^3 u_x = 0, \quad x > 0;$
 $u|_{y=1} = 3 + \frac{6}{x^2}, \quad u_y|_{y=1} = 6, \quad x > 0.$

2.④ Решить задачу $u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} - t e^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0;$
 $u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0,$
 $(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0.$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
 $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{x^2}{\pi} \sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi} = -\pi \sin t, \quad t \geq 0.$

4.③ Решить задачу $\Delta u = 4 \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
 $u_r|_{r=1} = 2 \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = 1 - 5 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

5.⑥ Решить задачу $u_t = \frac{1}{2} \Delta u + t^2 e^y \cdot \sin(t^3 + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$
 $u|_{t=0} = (x^2 - y^2) \operatorname{ch}(y - x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
 $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{1}{2} x^2 \right) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$
и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Свести к интегральному уравнению задачу
 $-x^2 y'' - 3xy' = \lambda y + x, \quad \frac{1}{2} < x < 1; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad 2y(1) + y'(1) = 0.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **42** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФАКИ, ФФКЭ, ФУПМ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$u_{xx} + 3x^2 u_{xy} + 9x^4 u_y + \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right) u_x = 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{x=1} = y^2 e^{y-1}, \quad u_x|_{x=1} = -3y^2 e^{y-1}.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} - x \sin t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x + x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t + 3t^2 + t^3, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (x - 4) \cos 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u|_{x=0} = \cos 2t - 1, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = \frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{e} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1/e} = 1 + \cos \varphi, \quad u|_{r=1} = \cos 2\varphi - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x + z) \operatorname{arctg}(x - z), \quad u_t|_{t=0} = x^2 \cos y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y^2 - 3xy) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Свести к интегральному уравнению задачу
$$-xy'' + 2y' = \lambda y + \sin x, \quad \frac{1}{4} < x < 1; \quad 12y\left(\frac{1}{4}\right) = y'\left(\frac{1}{4}\right), \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **43** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФАКИ, ФФКЭ, ФУПМ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2yu_y + xu_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0;$$
$$u|_{x=1} = \frac{1}{y^2} + y - 1, \quad u_x|_{x=1} = 2y - \frac{2}{y^2}, \quad y > 0.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} + (x+1)e^{-t}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = -1 - x - e^{-x}, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x + u)|_{x=0} = 2 - 2t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2a^2 + x^2 \cos t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$$
$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = 16 \frac{\cos 4\varphi}{r^2}, \quad 1 < r < \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$(u_r + 2u)|_{r=1} = \sin 2\varphi - 2 \cos 4\varphi, \quad u|_{r=\sqrt{2}} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{4} \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_t = \Delta u + t \cos y \operatorname{sh}(x - t^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (z^2 - y^2)e^{y+z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^3 y + y^2) \varphi(y) dy + 3ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Свести к интегральному уравнению задачу

$$-x^2 y'' - xy' = \lambda y + \cos x, \quad 1 < x < 2; \quad y(1) = y'(1) \cdot \ln 2, \quad y(2) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **44** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФАКИ, ФФКЭ, ФУПМ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$u_{xx} - 2(2x + 1)u_{xy} + 4x(x + 1)u_{yy} - 2u_y = 0;$$
$$u|_{x=-1} = y - y^2, \quad u_x|_{x=-1} = 4y.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t - 4t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (2x - \pi - 9) \sin 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi/2} = \sin 3t - 3t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = \frac{12 \sin 2\varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = -6 + 8 \cos \varphi - 3 \sin 2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 - 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y + z) \arcsin(y - z), \quad u_t|_{t=0} = z^2 \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 + x^2) \varphi(y) dy + ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Свести к интегральному уравнению задачу

$$-y'' - 2y' = \lambda y e^{-x^2} + e^{-x}, \quad 0 < x < 3; \quad y(0) = 3y'(0), \quad y'(3) = 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **41** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФОПФ, ФПФЭ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу $x^4 u_{xx} + x^2 u_{xy} - 2u_{yy} + 2x^3 u_x = 0, \quad x > 0;$
 $u|_{y=1} = 3 + \frac{6}{x^2}, \quad u_y|_{y=1} = 6, \quad x > 0.$

2.④ Решить задачу $u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} - t e^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0;$
 $u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0,$
 $(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0.$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
 $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{x^2}{\pi} \sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi} = -\pi \sin t, \quad t \geq 0.$

4.③ Решить задачу $\Delta u = 4 \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
 $u_r|_{r=1} = 2 \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = 1 - 5 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

5.⑥ Решить задачу $u_t = \frac{1}{2} \Delta u + t^2 e^y \cdot \sin(t^3 + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$
 $u|_{t=0} = (x^2 - y^2) \operatorname{ch}(y - x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{1}{2} x^2 \right) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Пусть $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < \pi\}$ и
 $\mathfrak{M} = \{u \in C^1(\overline{Q}); \quad u|_{x=0} = e^{-1} \cos y, \quad u|_{x=1} = \cos y, \quad u|_{y=0} = e^{x-1}, \quad u|_{y=\pi} = -e^{x-1}\}.$
Найти $\inf_{\mathfrak{M}} \iint_Q |\nabla u|^2 dx dy.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Вариант 42 Курс 3 Семестр 6 Факультеты ФОПФ, ФПФЭ
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$u_{xx} + 3x^2 u_{xy} + 9x^4 u_y + \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right) u_x = 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{x=1} = y^2 e^{y-1}, \quad u_x|_{x=1} = -3y^2 e^{y-1}.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} - x \sin t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x + x, \quad x \geq 0,$$

$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t + 3t^2 + t^3, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (x - 4) \cos 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u|_{x=0} = \cos 2t - 1, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = \frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{e} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$u_r|_{r=1/e} = 1 + \cos \varphi, \quad u|_{r=1} = \cos 2\varphi - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = (x + z) \operatorname{arctg}(x - z), \quad u_t|_{t=0} = x^2 \cos y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y^2 - 3xy) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
 и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Пусть $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < \frac{\pi}{4}\}$ и
$$\mathfrak{M} = \{u \in C^1(\overline{Q}); \quad u|_{x=0} = \cos 2y, \quad u|_{x=1} = e^2 \cos 2y, \quad u|_{y=0} = e^{2x}, \quad u|_{y=\pi/4} = 0\}.$$
 Найти $\inf_{\mathfrak{M}} \iint_Q |\nabla u|^2 dx dy.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **43** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФОПФ, ФПФЭ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу $x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2yu_y + xu_x = 0, \quad x > 0, y > 0;$
 $u|_{x=1} = \frac{1}{y^2} + y - 1, \quad u_x|_{x=1} = 2y - \frac{2}{y^2}, \quad y > 0.$

2.④ Решить задачу $u_{tt} = u_{xx} + (x+1)e^{-t}, \quad t > 0, x > 0;$
 $u|_{t=0} = 1 + x + e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = -1 - x - e^{-x}, \quad x \geq 0,$
 $(u_x + u)|_{x=0} = 2 - 2t, \quad t \geq 0.$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
 $u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2a^2 + x^2 \cos t, \quad t > 0, 0 < x < \pi;$
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geq 0.$

4.③ Решить задачу $\Delta u = 16 \frac{\cos 4\varphi}{r^2}, \quad 1 < r < \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
 $(u_r + 2u)|_{r=1} = \sin 2\varphi - 2 \cos 4\varphi, \quad u|_{r=\sqrt{2}} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{4} \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

5.⑥ Решить задачу $u_t = \Delta u + t \cos y \operatorname{sh}(x - t^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$
 $u|_{t=0} = (z^2 - y^2)e^{y+z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^3 y + y^2) \varphi(y) dy + 3ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Пусть $Q = \{(x, y) : 0 < x < \frac{\pi}{8}, 0 < y < 1\}$ и
 $\mathfrak{M} = \{u \in C^1(\overline{Q}); \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/8} = e^{-4y}, \quad u|_{y=0} = \sin 4x, \quad u|_{y=1} = e^{-4} \sin 4x\}.$

Найти $\inf_{\mathfrak{M}} \iint_Q |\nabla u|^2 dx dy.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **44** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФОПФ, ФПФЭ**
2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$u_{xx} - 2(2x + 1)u_{xy} + 4x(x + 1)u_{yy} - 2u_y = 0;$$
$$u|_{x=-1} = y - y^2, \quad u_x|_{x=-1} = 4y.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t - 4t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (2x - \pi - 9) \sin 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi/2} = \sin 3t - 3t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = \frac{12 \sin 2\varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = -6 + 8 \cos \varphi - 3 \sin 2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 - 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y + z) \arcsin(y - z), \quad u_t|_{t=0} = z^2 \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 + x^2) \varphi(y) dy + ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Пусть $Q = \{(x, y): 0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < y < 1\}$ и

$$\mathfrak{M} = \{u \in C^1(\overline{Q}); \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/4} = e^{-2y}, \quad u|_{y=0} = \sin 2x, \quad u|_{y=1} = -e^{-2} \sin 2x\}.$$

Найти $\inf_{\mathfrak{M}} \iint_Q |\nabla u|^2 dx dy$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **41** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФАЛТ** 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков	
Фамилия проверяющего	

Баллы БРС	
Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$x^4 u_{xx} + x^2 u_{xy} - 2u_{yy} + 2x^3 u_x = 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{y=1} = 3 + \frac{6}{x^2}, \quad u_y|_{y=1} = 6, \quad x > 0.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} - t e^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{x^2}{\sin t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi} = -\pi \sin t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = 4 \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2 \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = 1 - 5 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_t = \frac{1}{2} \Delta u + t^2 e^y \cdot \sin(t^3 + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x^2 - y^2) \operatorname{ch}(y - x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{1}{2} x^2 \right) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 4u_x - u_y - v_x + v_y, \\ v_t = 6u_x - 6u_y - v_x + 4v_y, \\ u(x, y, 0) = \sin(x - y), \\ v(x, y, 0) = \cos(2x + y), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **42** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФАЛТ** 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков	
Фамилия проверяющего	

Баллы БРС	
Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$u_{xx} + 3x^2u_{xy} + 9x^4u_y + \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)u_x = 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{x=1} = y^2e^{y-1}, \quad u_x|_{x=1} = -3y^2e^{y-1}.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} - x \sin t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x + x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t + 3t^2 + t^3, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (x - 4) \cos 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u|_{x=0} = \cos 2t - 1, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = \frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{e} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1/e} = 1 + \cos \varphi, \quad u|_{r=1} = \cos 2\varphi - \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x + z) \arctg(x - z), \quad u_t|_{t=0} = x^2 \cos y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (y^2 - 3xy) \varphi(y) dy + a, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = -5u_x - u_y + 2v_x + v_y, \\ v_t = -12u_x - 6u_y + 5v_x + 4v_y, \\ u(x, y, 0) = \frac{1}{4 + (x - y)^2}, \\ v(x, y, 0) = \frac{1}{1 + (x + 2y)^2}, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **43** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФАЛТ** 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков		Баллы БРС	
Фамилия проверяющего		Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу
$$x^2 u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2yu_y + xu_x = 0, \quad x > 0, y > 0;$$
$$u|_{x=1} = \frac{1}{y^2} + y - 1, \quad u_x|_{x=1} = 2y - \frac{2}{y^2}, \quad y > 0.$$

2.④ Решить задачу
$$u_{tt} = u_{xx} + (x+1)e^{-t}, \quad t > 0, x > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + e^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = -1 - x - e^{-x}, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x + u)|_{x=0} = 2 - 2t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2a^2 + x^2 \cos t, \quad t > 0, 0 < x < \pi;$$
$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу
$$\Delta u = 16 \frac{\cos 4\varphi}{r^2}, \quad 1 < r < \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$(u_r + 2u)|_{r=1} = \sin 2\varphi - 2 \cos 4\varphi, \quad u|_{r=\sqrt{2}} = -\frac{9}{2} + \frac{15}{4} \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу
$$u_t = \Delta u + t \cos y \operatorname{sh}(x - t^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (z^2 - y^2)e^{y+z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^3 y + y^2) \varphi(y) dy + 3ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = u_x + 4u_y - 6v_x - 6v_y, \\ v_t = u_x + u_y - 4v_x - v_y, \\ u(x, y, 0) = \cos(x + y), \\ v(x, y, 0) = -\sin(3x - y), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **44** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФАЛТ** 2013/2014 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма очков	
Фамилия проверяющего	

Баллы БРС	
Фамилия преподавателя группы	

1.④ Решить задачу

$$u_{xx} - 2(2x + 1)u_{xy} + 4x(x + 1)u_{yy} - 2u_y = 0;$$
$$u|_{x=-1} = y - y^2, \quad u_x|_{x=-1} = 4y.$$

2.④ Решить задачу

$$u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0;$$
$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos t - 4t, \quad t \geq 0.$$

3.⑥ При различных значениях параметра $a > 0$ решить задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + (2x - \pi - 9) \sin 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0; \quad u|_{x=\pi/2} = \sin 3t - 3t, \quad t \geq 0.$$

4.③ Решить задачу

$$\Delta u = \frac{12 \sin 2\varphi}{r^2}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = -6 + 8 \cos \varphi - 3 \sin 2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 - 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5.⑥ Решить задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y + z) \arcsin(y - z), \quad u_t|_{t=0} = z^2 \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.④ Решить при всех допустимых значениях λ и a уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^3 + x^2) \varphi(y) dy + ax, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

и найти характеристические числа, собственные функции ядра.

7.④ Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = -8u_y - v_x + 3v_y, \\ v_t = -6u_x - 18u_y + 5v_x + 7v_y, \\ u(x, y, 0) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \\ v(x, y, 0) = \frac{1}{1 + (3x - y)^2}, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

ИНСТРУКЦИЯ

по проверке экзаменационной контрольной работы по УМФ
(3 курс, 6 семестр 2013/2014 учебный год).

1. ④	Найдены характеристики	1 очко
	Сделана характеристическая замена переменных (т.е. найден вид уравнения в новых переменных)	1 очко
	Найдены функции $f(\xi)$ и $g(\eta)$ и выписано решение задачи Коши	2 очка
<hr/>		
2. ④	Найдено частное решение уравнения и получена смешанная задача для однородного уравнения	1 очко
	Найдены функции $f(x + at)$ и $g(x - at)$ при $x - at > 0$	1 очко
	Найдена функция $g(x - at)$ при $x - at < 0$	1 очко
	Произведена «склейка»	1 очко
<hr/>		
3. ⑥	Сведено к задаче с однородными граничными условиями	1 очко
	Найдена система собственных функций	1 очко
	Разложена в ряд Фурье правая часть уравнения (начальные условия)	1 очко
	Составлены задачи для нахождения $T_k(t)$	1 очко
	Найдены $T_k(t)$ при тех значениях параметра a , для которых нет случая резонанса	1 очко
	Определены значения параметра a , при которых резонанс возможен, и найдены $T_k(t)$ в этом случае	1 очко
	За ошибку при поиске системы собственных функций ставить не более 1 (одного) очка за всю задачу.	
<hr/>		
4. ③	Задача сведена к краевой задаче для уравнения Лапласа	1 очко
	Выписано, в каком виде будет искаться решение	1 очко
	Составлена система для нахождения коэффициентов и решена	1 очко
<hr/>		
5. ⑥	Варианты 41 и 43: найден частное решение уравнения и задача сведена к задаче Коши для однородного уравнения теплопроводности	3 очка
	Решена полученная задача Коши для однородного уравнения теплопроводности ...	3 очка
	Варианты 42 и 44: задача разбита на две задачи и решена каждая из подзадач	по 3 очка
<hr/>		
6. ④	Составлена система для нахождения C_1 и C_2	1 очко
	Решена данная система при $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$ и выписано решение уравнения	1 очко
	Решена данная система в случаях $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ и выписано решение уравнения .	1 очко
	Найдены собственные функции и характеристические числа ядра	1 очко
<hr/>		
7. ④	(поток Зубова В.И.) Сведено уравнение к дивергентному виду	1 очко
	Найдены соответствующие $y_1(x)$ и $y_2(x)$	1 очко
	Выписана функция Грина	1 очко
	Выписано получившееся интегральное уравнение	1 очко
	Если задача сводится к интегральному уравнению с помощью функции Грина другого дифференциального оператора (т.е. без первоначального сведения к дивергентному виду), то при верных выкладках задачу засчитать.	
<hr/>		
7. ④	(поток Михайлова В.П.) Составлена задача для поиска функции, реализующей $\inf J(u)$	1 очко
	Решена данная задача	2 очка
	Найдено значение $J(u_0) = \inf_{\mathfrak{M}} J(u)$	1 очко
