**2012-2013** **МФТИ-31**

---

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение единственно:

$$xy\,u_{xx} + (y^2 - x^2)u_{xy} - xy\,u_{yy} + y\,u_x - x\,u_y = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$
$$u(x,1) = 1 - x, \quad u_y(x,1) = x, \quad 1 < x < 2.$$

---

**2.** $\boxed{5}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$u_{tt} = u_{xx} - (3x-1)\cos t, \quad x, t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\sin x + 3x - 1, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = 4\cos t + 2, \quad t \geqslant 0.$$

---

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу на отрезке:

$$6u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3u - 3(3x + t - 2) - 15\pi e^{-t}\sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{6},\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 5\cos 3x + 3x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6},$$
$$u_x|_{x=0} = 3,\ \ u|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\pi + 2t), \quad t \geqslant 0.$$

---

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 7r^2\cos 3\varphi, \quad 1 < r < 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u_r|_{r=1} = 1 + 4\cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u|_{r=2} = 1 + 17\sin 2\varphi + 16\cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

---

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} = \Delta u + yz\,e^{x+t},$$
$$u|_{t=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$u_t|_{t=0} = (x-y)e^{(x-y)^2} + e^z.$$

---

**6.** $\boxed{5}$ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\varphi(y)dy + \sqrt{x} + \alpha\ .$$

Определить то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при всех значениях параметра $\alpha$.

---

**7.** $\boxed{4}$ Среди функций $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ класса $C^1(|x| \leqslant 2)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=2} = 3(x_1^2 - x_2^2) + 9$, найти те, на которых реализуется минимум функционала

$$J(u) = \int\limits_{|x|<2} (|\nabla u|^2 + 24|x|u)\, dx.$$

**8.** $\boxed{4}$ Найти решение смешанной задачи:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} + \frac{u}{x^2} = u_{xx} + \frac{u_x}{x} + \sin 3t \cdot J_1(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1,\ \ t > 0,\\
&u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
&|u(t,0)| < \infty, \quad u(t,1) = 0,\ \ t \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где $\mu_1$ — положительный нуль функции Бесселя $J_1(x)$.

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' - \frac{5\,u'}{2\,x} + \frac{u}{x^2} = \frac{\lambda\, u}{x^{\frac{5}{2}}}\ , \qquad 1 < x < 4\ ;$$

$$u(1) - u'(1) = 0\ , \qquad u(4) + 2u'(4) = 0\ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение единственно:

$$xy\,u_{xx} + (x^2 + y^2)u_{xy} + xy\,u_{yy} + y\,u_x + x\,u_y = 0, \quad 0 < y < x,$$
$$u(x,1) = 1 - \ln x, \quad u_y(x,1) = 1, \quad 2 < x < 3.$$

**2.** $\boxed{5}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 8\sin t\cos x, \quad x,t > 0,$$
$$u|_{t=0} = x^3 + x, \quad u_t|_{t=0} = -9x^2 + \cos x, \quad x \geqslant 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = 2 + 3t - \sin t, \quad t \geqslant 0.$$

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу на отрезке:

$$7u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 2u - 2(x+t) + 7 + 21\pi e^{-t}\sin 4x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \; t > 0,$$
$$u|_{t=0} = x - 7\cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \; u|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\pi + 4t), \quad t \geqslant 0.$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 12r^2\sin 2\varphi, \quad 1 < r < 2, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$(u + u_r)|_{r=1} = 1 + 2\cos\varphi + 5\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u_r|_{r=2} = 1 + 32\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$3u_{tt} = \frac{1}{2}\Delta u + xt^2\cos(y+z),$$
$$u|_{t=0} = (x + y - z)e^{2x},$$
$$u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

**6.** $\boxed{5}$ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)\varphi(y)dy + \alpha\sqrt{x} + 3\ .$$

Определить то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при всех значениях параметра $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ Среди функций $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ класса $C^1(|x| \leqslant 2)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=2} = 8x_1x_2 + 7$, найти те, на которых реализуется минимум функционала

$$J(u) = \int\limits_{|x|<2} (|\nabla u|^2 + 12u)\, dx.$$

**8.** $\boxed{4}$ Найти решение смешанной задачи:

$$\begin{aligned} &u_t + \frac{16u}{x^2} = u_{xx} + \frac{u_x}{x} + t \cdot J_4(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1,\ \ t > 0, \\ &u(0,x) = 3J_4(\mu_2 x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &|u(t,0)| < \infty, \quad u(t,1) = 0,\ \ t \geqslant 0, \end{aligned}$$

где $\mu_1$, $\mu_2$ — различные положительные нули функции Бесселя $J_4(x)$.

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' - \frac{u'}{4\,x} + \frac{9\,u}{8\,x^2} = \frac{\lambda\,u}{x^{\frac{1}{4}}}\ , \qquad 1 < x < 16\ ;$$

$$3u(1) - 2u'(1) = 0\ , \qquad u(16) = 0\ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение единственно:

$$2xy\,u_{xx} + (2y^2 - x^2)u_{xy} - xy\,u_{yy} + 2y\,u_x - x\,u_y = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$
$$u(x,1) = x, \quad u_y(x,1) = -x, \quad 1 < x < 2.$$

**2.** $\boxed{5}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$u_{tt} = u_{xx} - 6x, \quad x, t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0$$
$$(u - u_x)_{x=0} = -2t^3 + 3t^2 - 2\cos t, \quad t \geqslant 0.$$

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$4u_t = 16u_{xx} + 5u - \pi(5xt - 4x + 1) + 2\pi e^{-t}\sin x, \quad 0 < x < 2\pi\,,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \frac{4}{15}\sin\frac{x}{4} + \pi, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,,$$
$$u|_{x=0} = \pi,\ u_x|_{x=2\pi} = \pi t, \quad t \geqslant 0.$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 7r\sin 4\varphi, \quad 1 < r < 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u|_{r=1} = 2 - \sin 4\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u_r|_{r=2} = 2 + 17\cos 2\varphi - 12\sin 4\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} = \Delta u - 12\,\mathrm{sh}(x - y + z)\,e^t,$$
$$u|_{t=0} = \mathrm{sh}\big(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\big),$$
$$u_t|_{t=0} = xy^3 z.$$

**6.** $\boxed{5}$ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)\varphi(y)dy + \alpha\sqrt{x} + 1\ .$$

Определить то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при всех значениях параметра $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ Среди функций $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ класса $C^1(|x| \leqslant 2)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=2} = 3x_3^2 + 2x_3^3$, найти те, на которых реализуется минимум функционала

$$J(u) = \int\limits_{|x|<2} (|\nabla u|^2 + 24x_3 u)\, dx.$$

**8.** $\boxed{4}$ Найти решение смешанной задачи:

$$u_{tt} + \frac{4u}{x^2} = u_{xx} + \frac{u_x}{x} + e^{-t} \cdot J_2(\mu_1 x) \quad 0 < x < 1,\ \ t > 0,$$
$$u(0, x) = 0,\ u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$|u(t, 0)| < \infty, \quad u(t, 1) = 0,\ \ t \geqslant 0,$$

где $\mu_1$ — положительный нуль функции Бесселя $J_2(x)$.

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' + \frac{u'}{3\,x} + \frac{4\,u}{3\,x^2} = \lambda\, x^{\frac{1}{3}} u\ , \qquad 1 < x < 8\ ;$$

$$2u(1) - u'(1) = 0\ , \qquad u(8) + 12u'(8) = 0\ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение единственно:

$$xy\,u_{xx} + (2x^2 + y^2)u_{xy} + 2xy\,u_{yy} + y\,u_x + 2x\,u_y = 0, \quad 0 < y < x\sqrt{2},$$
$$u(x,1) = \ln x; \quad u_y(x,1) = -1, \quad 1 < x < 2.$$

**2.** $\boxed{5}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 4x\sin 2t, \quad x, t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin x + x, \quad u_t|_{t=0} = 2\cos x + 2x, \quad x \geqslant 0,$$
$$(u_x - u)|_{x=0} = \cos 2t + 8t^3 + 12t^2 + 2, \quad t \geqslant 0.$$

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу на полуоси:

$$5u_t = 9u_{xx} + 4u - \pi(4x + 4t - 5) + \frac{5\pi}{12}\,e^{-t}\sin 2x, \quad 0 < x < \frac{3\pi}{2}\,, \ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \frac{1}{28}\sin\frac{x}{3} + \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\,,$$
$$u|_{x=0} = \pi t, \ \ u_x|_{x=\frac{3\pi}{2}} = \pi, \quad t \geqslant 0.$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу в кольце:

$$\Delta u = 16r^3\sin 3\varphi, \quad 1 < r < 2, \ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$u|_{r=1} = 1 + \sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$(u + u_r)|_{r=2} = 1 - 11\sin\varphi + 112\sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} = \frac{1}{4}\Delta u + (x^2 - 2y^2 + z^2)\sin t,$$
$$u|_{t=0} = (x + y - z)\,e^{x+y},$$
$$u_t|_{t=0} = \operatorname{ch}(x^2 + y^2 + z^2).$$

**6.** $\boxed{5}$ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\varphi(y)dy + \sqrt{x} + \alpha\ .$$

Определить то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при всех значениях параметра $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ Среди функций $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ класса $C^1(|x| \leqslant 2)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=2} = 2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 + 20$, найти те, на которых реализуется минимум функционала

$$J(u) = \int\limits_{|x|<2} (|\nabla u|^2 + 40|x|^2 u)\, dx.$$

**8.** $\boxed{4}$ Найти решение смешанной задачи:

$$\begin{aligned} & u_t + \frac{9u}{x^2} = u_{xx} + \frac{u_x}{x} + J_3(\mu_1 x) \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ & u(0,x) = J_3(\mu_1 x) - J_3(\mu_2 x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ & |u(t,0)| < \infty, \quad u(t,1) = 0, \;\; t \geqslant 0, \end{aligned}$$

где $\mu_1$, $\mu_2$ — различные положительные нули функции Бесселя $J_3(x)$.

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' - \frac{4\,u'}{3\,x} + \frac{u}{12\,x^2} = \frac{\lambda\, u}{x^{\frac{4}{3}}} \ , \qquad 1 < x < 64 \ ;$$

$$u(1) - 6u'(1) = 0 \ , \qquad u(64) = 0 \ .$$