**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и найти область, в которой решение определено однозначно:

$$u_{xx} + (x-1)\, u_{xy} - x\, u_{yy} - \frac{u_x - u_y}{x+1} = 0\ , \qquad x > -1\ ;$$

$$u|_{x=0} = y^2 - \cos y\,, \qquad u_x|_{x=0} = \sin y\,, \qquad 0 < y < 1\ .$$

**2.** $\boxed{6}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 8t - x\ , \qquad x > 0\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = x\,\mathbf{e}^x + \sin x - + \frac{x^3}{6}\,, \qquad x \ge 0\ ;$$ +sin t-

$$u_t|_{t=0} = -(1+x)\,\mathbf{e}^x + \cos x\ , \qquad x \ge 0\ ;$$

$$\frac{(u - u_x)|_{x=0} = t - 1 + t^2 + (4t^3}{3}$$

cos t , t$\geq 0$ ., $\mathrm{C}^2(x > 0\,,\, t > 0)$ . Ответ обосновать.

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2\,u + 18\,\pi\,x\,\mathbf{e}^{-t}\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = 0\,, \qquad u_t|_{t=0} = \sin 3\,x - 36\sin x\,, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,;$$

$$u|_{x=0} = 0\,, \qquad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\,, \qquad t \ge 0\ .$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить задачу Дирихле

$$\triangle u = \frac{25}{r^2}\,\sin 5\varphi\ , \qquad 1 < r < 2\ , \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ , \qquad x = r\cos\varphi\ , \qquad y = r\sin\varphi\ ;$$

$$u|_{r=1} = 1 - \sin 5\varphi + \cos 5\varphi\,, \qquad u|_{r=2} = 1 - \sin 5\varphi + 32\cos 5\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \triangle u = \sin\left(4y - 3z + 5t\right)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = xy^2 + yz^2 + zx^2\,, \qquad u_t|_{t=0} = 0\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\,.$$

**6.** $\boxed{6}$ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(\,5|x| - 3|y|\,\right)\varphi(y)\,dy + |x| + \alpha\,, \qquad |x| < 1\ ,$$

где $x = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$ , $y = (y_1\,,\, y_2\,,\, y_3)$ , $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ , $dy = 4\,\pi\,|y|^2\,d|y|$ , разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при этом значении $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ На множестве $\mathsf{H} = \left\{ u(x) \in C^1(|x| \le 1)\,,\ u|_{|x|=1} = 0 \right\}$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$, найти функцию, реализующую

$$\inf_{u \in \mathsf{H}} \int\limits_{|x|<1} \left[ |\nabla u|^2 + 24(x_1^2 - x_2^2) u \right] dx \ .$$

**8.** $\boxed{4}$ Решить смешанную задачу

$$u_t = 9 \triangle u - 2\, u + J_2 \left( \frac{\mu_3^{(2)}\, r}{2} \right) \cos 2 \left( \varphi - \frac{\pi}{6} \right) \ , \quad r < 2 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t > 0 \ , \quad u = u(r, \varphi, t) \ ;$$

$$u|_{t=0} = J_1 \left( \frac{\mu_1^{(1)}\, r}{2} \right) \sin 2\varphi \ , \quad r \le 2 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ ;$$

$$u|_{r=2} = 0 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

где $\mu_j^{(k)}$ — $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ , $j = 1, 2, 3 \ldots$ ; $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$ , $x = r \cos \varphi$ , $y = r \sin \varphi$ .

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' + \frac{u'}{2\, x} + \frac{u}{x^2} = \lambda \sqrt{x}\, u \ , \qquad 1 < x < 4 \ ;$$

$$u'(1) = 0 \ , \qquad u(4) = 0 \ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и найти область, в которой решение определено однозначно:

$$u_{xx} + (1-2x)\,u_{xy} - 2\,x\,u_{yy} - 2\,\frac{u_x + u_y}{2x+1} = 0\ , \qquad x < -\frac{1}{2}\ ;$$

$$u|_{y=x} = \sqrt{x^2+x}\,, \quad -2 < x < -1\ ; \quad u|_{y=-x^2} = x^4 + 2x^3 + x^2\,, \quad -3 < x < -1\ .$$

**2.** $\boxed{6}$ Решить смешанную задачу

$$4\,u_{tt} = u_{xx} - 24\sqrt{1+2x+t}\ , \qquad x > 0\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = 28\,x^2 - 8\,x + 6 + 2\,x\,(1+2\,x)^{\frac{3}{2}}\,, \qquad x \ge 0\ ;$$

$$u_t|_{t=0} = -20\,x + 8 - (1+2\,x)^{\frac{3}{2}} + 3\,x\,(1+2\,x)^{\frac{1}{2}}\,, \qquad x \ge 0\ ;$$

$$(2\,u + u_x)|_{x=0} = 8\,t^2 - 4\,t + 4 + 2\,(1-t)\,(1+t)^{\frac{3}{2}} - 3\,t\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\ , \qquad t \ge 0\ .$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x>0\,,\,t>0)$. Ответ обосновать. *Указание*: частное решение искать, перейдя к характеристическим переменным $\xi = 2x - t\,,\ \eta = 2x + t$.

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 16\,u_{xx} + 5\,u - 9\,\pi\,(x - 2\,\pi)\cos 2\,t\,, \qquad 0 < x < 2\,\pi\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = \cos\frac{3\,x}{4} - 18\cos\frac{x}{4}\,, \qquad u_t|_{t=0} = 2\cos\frac{x}{4}\,, \qquad 0 \le x \le 2\,\pi\,;$$

$$u_x|_{x=0} = 0\,, \qquad u|_{x=2\,\pi} = 0\,, \qquad t \ge 0\ .$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу

$$\triangle u = \frac{16}{r}\cos 3\varphi\ , \quad 1 < r < 2\ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ , \quad x = r\cos\varphi\ , \quad y = r\sin\varphi\ ;$$

$$u|_{r=1} = 2 - 2\cos 3\varphi + \sin 3\varphi\,, \qquad u_r|_{r=2} = -2\cos 3\varphi + 12\sin 3\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши

$$u_t - \triangle u = \mathbf{e}^{-25\,t}\cos(3x - 4z)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = x^2y^2z^2 + \cos z\,\sin(x + 2y + 3z)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\,.$$

**6.** $\boxed{6}$ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} (\,2|x| - |y|\,)\,\varphi(y)\,dy + 10|x|^2 + \alpha|x|\,, \qquad |x| < 1\ ,$$

где $x = (x_1\,,\,x_2)$ , $y = (y_1\,,\,y_2)$ , $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ , $dy = 2\,\pi\,|y|\,d|y|$ , разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при этом значении $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ Найти

$$\inf_{u\in \mathsf{H}} \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx \ ,$$

где $\mathsf{H} = \Big\{ u(x) \in C^1(|x| \le 1)\,,\ u|_{|x|=1} = 2\,x_2^2\,,\ x=(x_1,x_2)\in \mathrm{R}^2$ .

**8.** $\boxed{4}$ Решить смешанную задачу

$$u_t = 4\,\triangle u - u + \mathbf{e}^{-t} J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}\,r}{5}\right)\sin 3\varphi\ ,\quad r<5\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\quad t>0\ ,\quad u=u(r,\varphi,t)\ ;$$

$$u|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}\,r}{5}\right)\cos 3\left(\varphi-\frac{\pi}{9}\right)\ ,\quad r\le 5\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ;$$

$$u|_{r=5} = 0\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\quad t\ge 0\ ,$$

где $\mu_j^{(k)}$ — $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$ , $k=0,1,2\ldots$ , $j=1,2,3\ldots$ ; $\triangle u = u_{xx}+u_{yy}$ , $x=r\cos\varphi$ , $y=r\sin\varphi$ .

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' - \frac{u'}{3\,x} + \frac{u}{3\,x^2} = \frac{\lambda\,u}{x^{\frac{1}{3}}}\ ,\qquad \frac{1}{8}<x<1\ ;$$

$$8\,u\left(\frac{1}{8}\right) + 3\,u'\left(\frac{1}{8}\right) = 0\ ,\qquad u(1)+u'(1)=0\ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и определить область, в которой решение определено однозначно:

$$y\,u_{xx} + (y+1)\,u_{xy} + u_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1-y} = 0\ , \qquad y < 1\ ;$$

$$u|_{y=0} = x^3 - \operatorname{ch} x\,, \qquad u_y|_{y=0} = \operatorname{sh} x\,, \qquad 0 < x < \frac{3}{2}\ .$$

**2.** $\boxed{6}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{8\,(x+t)}{1+(x+t)^2}\ , \qquad x > 0\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = 2\,x\,\ln\,(1+x^2) + x\operatorname{ch} x\,, \qquad x \geq 0\ ;$$

$$u_t|_{t=0} = \frac{4\,x^2}{1+x^2} - x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\,, \qquad x \geq 0\ ;$$

$$(u - u_x)|_{x=0} = -1 - t - 2\ln\,(1+t^2)\ , \qquad t \geq 0\ .$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\, t > 0)$. Ответ обосновать. *Указание*: частное решение искать, перейдя к характеристическим переменным $\xi = x - t$, $\eta = x + t$.

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 10\,u + 9\,\pi\,\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}^{-3\,t}\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = 2\cos 3\,x\,, \qquad u_t|_{t=0} = 3\cos x\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,;$$

$$u_x|_{x=0} = 0\,, \qquad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\,, \qquad t \geq 0\ .$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить краевую задачу

$$\triangle u = 5r\sin 2\varphi\ , \qquad 1 < r < 2\ , \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ , \qquad x = r\cos\varphi\ , \qquad y = r\sin\varphi\ ;$$

$$u_r|_{r=1} = 3\sin 2\varphi + \cos 2\varphi\,, \qquad u|_{r=2} = 3 + 8\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi\,, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \triangle u = \operatorname{ch}(7z + 7t)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = y^2(x^2 + y^2 + z^2)\,, \qquad u_t|_{t=0} = 0\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\,.$$

**6.** $\boxed{6}$ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} (-6|x| + 10|y|\ )\,\varphi(y)\,dy + \alpha|x| + 1\,, \qquad |x| < 1\ ,$$

где $x = (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ , $y = (y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ , $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ , $dy = 4\,\pi\,|y|^2\,d|y|$ , разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при этом значении $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ На множестве $\mathsf{H} = \left\{ u(x) \in C^1(|x| \le 1) \,,\ u|_{|x|=1} = 0 \right\}$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$, найти функцию, реализующую

$$\inf_{u \in \mathsf{H}} \int\limits_{|x|<1} \left[ |\nabla u|^2 + 48\, x_1\, x_2\, u \right] dx \ .$$

**8.** $\boxed{4}$ Решить смешанную задачу

$$u_t = 9 \triangle u - 2\, u + \mathbf{e}^{-2t} J_1 \left( \frac{\mu_3^{(1)}\, r}{2} \right) \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \ , \quad r < 2 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t > 0 \ , \quad u = u(r, \varphi, t)$$

$$u|_{t=0} = 2 J_2 \left( \frac{\mu_3^{(2)}\, r}{2} \right) \cos \varphi \ , \quad r \le 2 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ ;$$

$$u|_{r=2} = 0 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

где $\mu_j^{(k)}$ — $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$ , $k = 0, 1, 2 \ldots$ , $j = 1, 2, 3 \ldots$ ; $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$ , $x = r \cos \varphi$ , $y = r \sin \varphi$ .

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-x\, u'' - \frac{u'}{2} + \frac{u}{2\, x} = \lambda \sqrt{x}\, u \ , \qquad \frac{1}{4} < x < 1 \ ;$$

$$u \left( \frac{1}{4} \right) = 0 \ , \qquad 2\, u(1) + u'(1) = 0 \ .$$

**1.** $\boxed{6}$ Решить задачу и определить область, в которой решение определено однозначно:

$$u_{xx} + (x+1)\,u_{xy} + x\,u_{yy} + \frac{u_x + u_y}{1-x} = 0\ , \qquad x > 1\ ;$$

$$u|_{y=x} = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\,, \qquad 2 < x < 4\ ; \qquad u|_{y=\frac{x^2}{2}} = \sqrt{x^2 - 2x}\,, \qquad 2 < x < 4\ .$$

**2.** $\boxed{6}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 4\,u_{xx} - \frac{8}{\sqrt{1+x+2\,t}}\ , \qquad x > 0\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = 4\,x^2 + 2\,x + x\,\sqrt{1+x}\,, \qquad x \ge 0\ ;$$

$$u_t|_{t=0} = 8\,x - 4 - 2\,\sqrt{1+x} + \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,, \qquad x \ge 0\ ;$$

$$(u + u_x)|_{x=0} = 20\,t^2 + 4\,t + 2 + (1-2t)\,\sqrt{1+2\,t} - \frac{t}{\sqrt{1+2\,t}}\ , \qquad t \ge 0\ .$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\, t > 0)$. Ответ обосновать. *Указание*: частное решение искать, перейдя к характеристическим переменным $\xi = x - 2t$, $\eta = x + 2t$.

**3.** $\boxed{8}$ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 16\,u_{xx} + 2\,u + 9\,\pi\,x\,\mathbf{e}^{-t}\,, \qquad 0 < x < 2\,\pi\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = \sin\frac{\pi}{4}\,, \qquad u_t|_{t=0} = 2\sin\frac{3\,x}{4} - 72\,\sin\frac{x}{4}\,, \qquad 0 \le x \le 2\,\pi\,;$$

$$u|_{x=0} = 0\,, \qquad u_x|_{x=2\,\pi=0}\,, \qquad t\ge 0\ .$$

**4.** $\boxed{4}$ Решить задачу Неймана

$$\triangle u = 12\cos 4\varphi\ , \qquad 1 < r < 2\ , \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ , \qquad x = r\cos\varphi\ , \qquad y = r\sin\varphi\ ;$$

$$u_r|_{r=1} = \sin 4\varphi - 2\cos 4\varphi\,, \qquad u_r|_{r=2} = 8\sin 4\varphi - 4\cos 4\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ .$$

**5.** $\boxed{6}$ Решить задачу Коши

$$u_t - \triangle u = \mathbf{e}^{-6t}\sin(x - y + 2z)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\ , \qquad t > 0\ ;$$

$$u|_{t=0} = x^3 y^2 z + \sin y\,\cos(2x + y - 4z)\,, \qquad u_t|_{t=0} = 0\,, \qquad (x,y,z) \in \mathrm{R}^3\,.$$

**6.** $\boxed{6}$ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра $\alpha$, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} (\,|x| - 2|y|\,)\,\varphi(y)\,dy + \alpha|x|^2 + |x|\,, \qquad |x| < 1\ ,$$

где $x = (x_1\,,\,x_2)$, $y = (y_1\,,\,y_2)$, $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, $dy = 2\,\pi\,|y|\,d|y|$, разрешимо для любых $\lambda$. Найти решения при этом значении $\alpha$.

**7.** $\boxed{4}$ Показать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \le 1)$, удовлетворяющих условию $u(x)|_{|x|=1} = 2x_1^2$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx \ge 2\pi \ .$$

**7.** $\boxed{4}$ Решить смешанную задачу

$$u_t = 4\,\triangle u - 2\,u + J_2\left(\frac{\mu_2^{(2)}\,r}{3}\right)\cos 5\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \ , \quad r < 3 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t > 0 \ , \quad u = u(r, \varphi, t) \ ;$$

$$u|_{t=0} = J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}\,r}{3}\right)\sin 5\varphi \ , \quad r \le 3 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ ;$$

$$u|_{r=3} = 0 \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

где $\mu_j^{(k)}$ — $j$-й по порядку положительный нуль функции Бесселя $J_k$, $k = 0, 1, 2\ldots$ , $j = 1, 2, 3\ldots$ ; $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$ , $x = r\cos\varphi$ , $y = r\sin\varphi$ .

**9.** $\boxed{4}$ Свести к интегральному уравнению дифференциальную задачу

$$-u'' - \frac{3\,u'}{2\,x} + \frac{u}{2\,x^2} = \frac{\lambda\,u}{x^{\frac{3}{2}}} \ , \qquad \frac{1}{9} < x < 1 \ ;$$

$$u\left(\frac{1}{9}\right) = 0 \ , \qquad u(1) + u'(1) = 0 \ .$$