ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: Уравнения математической физики

Вариант: 111 **Курс:** 3 **Факультет:** ФФКЭ, ФАКИ **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{xy=1} = 1, \quad (1<x<2), \qquad u\big|_{y=x} = x^2, \quad (0.25<x<1).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x>0,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = 12x, \qquad u_t\big|_{t=0} = -3, \ (x\ge 0), \qquad (u-u_x)\big|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \ (t \ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0<x<3\pi,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = \cos(x/2), \qquad u_t\big|_{t=0} = x - 3\pi, \qquad (0 \le x \le 3\pi),$$

$$u_x\big|_{x=0} = \sin t, \qquad u\big|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_t = \Delta u - 12 sh2t \cdot shy, \quad ((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x^3 shy + (2x+y)\cos(1+y+2x) - yze^{-(z/2)^2}, \quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \ (r<1,\ 0\le\varphi\le 2\pi), \quad (3u+u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^{\pi} \left[\pi \sin x + (1-2\cos x)\cos y\right] u(y)\,dy + 1 - 6\cos x, \qquad u(x)\in C[0,\pi].$$

7. (4) Найти в пространстве обобщенных функций правую часть $F(x,t)\in D'(R^2)$ выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), \tag{1}$$

если регулярная обобщенная функция $u(x,t)\in D'(R^2)$ имеет вид $u(x,t) = \theta(t)\cdot v(x,t)$, (2)

где $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t\ge 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ а $v(x,t)$, $(x\in R^1, t\ge 0)$ - классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sin x \sin t, \\ v\big|_{t=0} = \cos x. \end{cases} \tag{3}$$

Является ли функция $u(x,t)$ решением обобщенной задачи Коши для уравнения (1) (с вычисленной посредством (2), (3) правой частью)? Принадлежит ли функция $u(x,t)$ пространству обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$? Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **112** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФФКЭ, ФАКИ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑥ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xx}+y\cdot u_{xy}+(2y^2+1)\cdot u_x=0,\qquad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=x^2}=0,\quad (2<x<5),\qquad u_y\big|_{y=x^2}=\frac{1}{2x}e^{-x^4},\quad (2<x<5).$$

2. ⑤ Найти решение смешанной задачи: $u_{tt}=u_{xx}+9\sin(2x+t),\quad (x>0,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0}=xe^x+\sin x+3\sin 2x,\qquad u_t\big|_{t=0}=-(1+x)e^x+\cos x+3\cos 2x,\quad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0}=t-1+t^2+4\sin t-7\cos t,\quad (t\ge 0).$$

3. ⑥ Решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx},\quad (0<x<\pi/2,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0}=x^2/4+\cos^2 x,\qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u_x\big|_{x=0}=0,\qquad u_x\big|_{x=\pi/2}=0.25\pi e^{-4t},\qquad (t\ge 0).$$

4. ⑦ Решить задачу Коши: $u_{tt}=\Delta u+(x^2+z^2)\cos t,\quad ((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0}=e^{-(x+y+z)^4},\qquad u_t\big|_{t=0}=(x^2+y^2+z^2)^{5/2}-z^2,\quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. ③ Решить задачу: $\Delta u=3r^{-4}\cos\varphi,\quad (r>1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi),$

$$|u(\infty)|<\infty,\qquad (4u-u_r)\big|_{r=1}=\cos\varphi+24\sin 4\varphi.$$

6. ⑤ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\cdot\int_{-1}^{1}\left[\sin^2\pi y+x\cdot(3y+1)\right]u(y)\,dy-2x+1,\qquad u(x)\in C[-1,1].$$

7. ④ Найти в пространстве обобщенных функций правую часть $F(x,t)\in D'(R^2)$ выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t),\qquad (1)$$

если регулярная обобщенная функция $u(x,t)\in D'(R^2)$ имеет вид $u(x,t)=\theta(t)\cdot v(x,t)$, (2)

где $\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ а $v(x,t),\ (x\in R^1, t\ge 0)$ - классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^{-t}\cos x,\\ v\big|_{t=0}=\cos x+\sin x.\end{cases}\qquad (3)$$

Является ли функция $u(x,t)$ решением обобщенной задачи Коши для уравнения (1) (с вычисленной посредством (2), (3) правой частью)? Принадлежит ли функция $u(x,t)$ пространству обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$? Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **113** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФФКЭ, ФАКИ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑥ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$(x-1)(y+1)^3u_{xx}-(x-1)^3(y+1)u_{yy}-(y+1)^3u_x+(x-1)^3u_y=0,\ (x>2,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=0}=2,\quad (2<x<3),\qquad u\big|_{y=x-2}=x,\quad (2<x<3).$$

2. ⑤ Найти решение смешанной задачи: $4u_{tt}=u_{xx}+150e^{x-2t},\qquad (x>0,\quad t>0),$

$$u\big|_{t=0}=8xe^x,\quad u_t\big|_{t=0}=-9e^x,\ (x\ge 0),\quad (u-u_x)\big|_{x=0}=2t-t^2-4e^{t/2}-4,\ (t\ge 0).$$

3. ⑥ Решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx},\quad (0<x<\pi/2,\quad t>0),$

$$u\big|_{t=0}=x,\qquad u_t\big|_{t=0}=\sin x+1,\qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u\big|_{x=0}=t,\qquad u_x\big|_{x=\pi/2}=\cos t,\qquad (t\ge 0).$$

4. ⑦ Решить задачу Коши: $u_t=\Delta u+5e^t\cos t\cdot\sin y,\qquad ((x,y,z)\in R^3,\quad t>0),$

$$u\big|_{t=0}=z^3\sin y+(x+z)ch(z-y)+(x+y)e^{-(x+y)^2},\quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. ③ Решить задачу:

$$\Delta u=r^3\sin 3\varphi,\quad (r<1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi),\qquad (u+3u_r)\big|_{r=1}=11\sin 3\varphi+5\cos 8\varphi-3.$$

6. ⑤ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\cdot\int_0^{\pi}\left[\cos x/(\sin y+2)+(2\sin x+4)\cos y\right]u(y)\,dy+\sin x-\cos x+2,$$

$$u(x)\in C[0,\pi].$$

7. ④ Найти в пространстве обобщенных функций правую часть $F(x,t)\in D'(R^2)$ выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t), \qquad (1)$$

если регулярная обобщенная функция $u(x,t)\in D'(R^2)$ имеет вид $u(x,t)=\theta(t)\cdot v(x,t)$, (2)

где $\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ а $v(x,t),\ (x\in R^1, t\ge 0)$ - классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=t^2\cos x,\\ v\big|_{t=0}=\sin^2 x.\end{cases} \qquad (3)$$

Является ли функция $u(x,t)$ решением обобщенной задачи Коши для уравнения (1) (с вычисленной посредством (2), (3) правой частью)? Принадлежит ли функция $u(x,t)$ пространству обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$? Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **114** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФФКЭ, ФАКИ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

---

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xy} - y\ln y\cdot u_{yy} - \ln y\cdot u_y = 0, \quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=e^x} = x\ln x, \quad (1<x<2), \qquad u_y\big|_{y=e^x} = \sqrt[4]{e}\cdot x^2 e^{-(x+0.5)^2}, \quad (1<x<2).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $u_{tt} = u_{xx} - 3\cos(x-2t)$, $(x>0,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = x\ln(1+x^2) + x\,ch x + \cos x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = 2x^2/(1+x^2) + \ln(1+x^2) - x\,sh x - ch x + 2\sin x, \quad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0} = (t-1)\ln(1+t^2) - 2t^2/(1+t^2) - t - 1 + \cos 2t - \sin 2t, \quad (t\ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_t = 8u_{xx} - x^2 e^{-2t}$, $(0<x<2\pi,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = \pi x + \sin(x/2), \ (0\le x\le 2\pi), \qquad u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=2\pi} = 2\pi^2 e^{-2t}, \quad (t\ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_{tt} = \Delta u + (3\cos 2y - z)\sin t$, $((x,y,z)\in R^3,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)^{5/2} + x^2\cos 2y, \qquad u_t\big|_{t=0} = x^2y^2z^2 + z + 1/[1+(x+y+z)^2].$$

5. (3) Решить задачу: $\Delta u = r^{-3}\cos 2\varphi$, $(r>1,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$,

$$|u(\infty)|<\infty, \qquad (2u-u_r)\big|_{r=1} = 3\cos 2\varphi + 11\sin 9\varphi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda\cdot\int_0^1 [x(3y-2)+(9x-6)y]u(y)\,dy + 4x - 2, \qquad u(x)\in C[0,1].$$

7. (4) Найти в пространстве обобщенных функций правую часть $F(x,t)\in D'(R^2)$ выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), \tag{1}$$

если регулярная обобщенная функция $u(x,t)\in D'(R^2)$ имеет вид $u(x,t)=\theta(t)\cdot v(x,t)$, (2)

где $\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ а $v(x,t)$, $(x\in R^1, t\ge 0)$ - классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2t^3 e^{-t^2},\\ v\big|_{t=0} = \cos^2 x.\end{cases} \tag{3}$$

Является ли функция $u(x,t)$ решением обобщенной задачи Коши для уравнения (1) (с вычисленной посредством (2), (3) правой частью)? Принадлежит ли функция $u(x,t)$ пространству обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$? Ответ обосновать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **111** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ, ФПФЭ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

---

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{xy=1} = 1, \quad (1<x<2), \qquad u\big|_{y=x} = x^2, \quad (0.25<x<1).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x>0,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = 12x, \qquad u_t\big|_{t=0} = -3, \ (x \ge 0), \qquad (u-u_x)\big|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \ (t \ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0<x<3\pi,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = \cos(x/2), \qquad u_t\big|_{t=0} = x - 3\pi, \qquad (0 \le x \le 3\pi),$$

$$u_x\big|_{x=0} = \sin t, \qquad u\big|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_t = \Delta u - 12 sh2t \cdot shy, \quad ((x,y,z)\in R^3,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x^3 shy + (2x+y)\cos(1+y+2x) - yze^{-(z/2)^2}, \quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \ (r<1,\ 0\le\varphi\le 2\pi), \quad (3u+u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^{\pi} [\pi \sin x + (1-2\cos x)\cos y] u(y)\,dy + 1 - 6\cos x, \qquad u(x) \in C[0,\pi].$$

7. (4) Найти $\inf\limits_{u\in \mathrm{M}} \left[\int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 + 2u)\,dx \right],$

где $\mathrm{M} = \left\{ u(x) \in C^1(|x| \le 1), \quad u\big|_{|x|=1} = x_1 + x_2 + x_3, \quad x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \right\}.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **112** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ, ФПФЭ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________ № группы ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xx}+y\cdot u_{xy}+(2y^2+1)\cdot u_x=0,\qquad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=x^2}=0,\quad (2<x<5),\qquad u_y\big|_{y=x^2}=\frac{1}{2x}e^{-x^4},\quad (2<x<5).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $u_{tt}=u_{xx}+9\sin(2x+t)$, $(x>0,\ \ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=xe^x+\sin x+3\sin 2x,\qquad u_t\big|_{t=0}=-(1+x)e^x+\cos x+3\cos 2x,\qquad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0}=t-1+t^2+4\sin t-7\cos t,\qquad (t\ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_t=u_{xx}$, $(0<x<\pi/2,\ \ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=x^2/4+\cos^2 x,\qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u_x\big|_{x=0}=0,\qquad u_x\big|_{x=\pi/2}=0.25\pi e^{-4t},\qquad (t\ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_{tt}=\Delta u+(x^2+z^2)\cos t$, $((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=e^{-(x+y+z)^4},\qquad u_t\big|_{t=0}=(x^2+y^2+z^2)^{5/2}-z^2,\qquad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу: $\Delta u=3r^{-4}\cos\varphi$, $(r>1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi)$,

$$|u(\infty)|<\infty,\qquad (4u-u_r)\big|_{r=1}=\cos\varphi+24\sin 4\varphi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\cdot\int_{-1}^{1}\left[\sin^2\pi y+x\cdot(3y+1)\right]u(y)\,dy-2x+1,\qquad u(x)\in C[-1,1].$$

7. (4)

$$\text{Найти}\ \inf_{u\in M}\left[\int_{|x|<1}\left(|\nabla u|^2+\frac{2u}{|x|}\right)dx\right],$$

где $M=\left\{u(x)\in C^1(|x|\le 1),\ \ u\big|_{|x|=1}=x_1+x_2+x_3,\ \ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\right\}.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **113** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ, ФПФЭ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

---

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$(x-1)(y+1)^3u_{xx}-(x-1)^3(y+1)u_{yy}-(y+1)^3u_x+(x-1)^3u_y=0,\ (x>2,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=0}=2,\quad (2<x<3),\qquad u\big|_{y=x-2}=x,\quad (2<x<3).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $4u_{tt}=u_{xx}+150e^{x-2t}$, $(x>0,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=8xe^x,\ \ u_t\big|_{t=0}=-9e^x,\ (x\ge 0),\ \ (u-u_x)\big|_{x=0}=2t-t^2-4e^{t/2}-4,\ (t\ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_{tt}=u_{xx}$, $(0<x<\pi/2,\ \ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=x,\qquad u_t\big|_{t=0}=\sin x+1,\qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u\big|_{x=0}=t,\qquad u_x\big|_{x=\pi/2}=\cos t,\qquad (t\ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_t=\Delta u+5e^t\cos t\cdot\sin y$, $((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0)$,

$$u\big|_{t=0}=z^3\sin y+(x+z)ch(z-y)+(x+y)e^{-(x+y)^2},\quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u=r^3\sin 3\varphi,\quad (r<1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi),\qquad (u+3u_r)\big|_{r=1}=11\sin 3\varphi+5\cos 8\varphi-3.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x)=\lambda\cdot\int_0^\pi\left[\cos x/(\sin y+2)+(2\sin x+4)\cos y\right]u(y)\,dy+\sin x-\cos x+2,$$

$$u(x)\in C[0,\pi].$$

7. (4) Найти $\inf\limits_{u\in M}\left[\int\limits_{|x|<1}(|\nabla u|^2+2u)\,dx\right]$,

где $M=\left\{u(x)\in C^1(|x|\le 1),\ \ u\big|_{|x|=1}=x_1-x_2-x_3,\ \ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\right\}.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **114** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФОПФ, ФПФЭ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________________ № группы ____________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑥ Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xy} - y\ln y\cdot u_{yy} - \ln y\cdot u_y = 0, \quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=e^x} = x\ln x, \quad (1<x<2), \qquad u_y\big|_{y=e^x} = \sqrt[4]{e}\cdot x^2 e^{-(x+0.5)^2}, \quad (1<x<2).$$

2. ⑤ Найти решение смешанной задачи: $u_{tt} = u_{xx} - 3\cos(x-2t)$, $(x>0,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = x\ln(1+x^2) + xchx + \cos x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = 2x^2/(1+x^2) + \ln(1+x^2) - xshx - chx + 2\sin x, \quad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0} = (t-1)\ln(1+t^2) - 2t^2/(1+t^2) - t - 1 + \cos 2t - \sin 2t, \quad (t\ge 0).$$

3. ⑥ Решить смешанную задачу: $u_t = 8u_{xx} - x^2 e^{-2t}$, $(0<x<2\pi,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = \pi x + \sin(x/2), \ (0\le x\le 2\pi), \qquad u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=2\pi} = 2\pi^2 e^{-2t}, \quad (t\ge 0).$$

4. ⑦ Решить задачу Коши: $u_{tt} = \Delta u + (3\cos 2y - z)\sin t$, $((x,y,z)\in R^3,\ t>0)$,

$$u\big|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)^{5/2} + x^2\cos 2y, \qquad u_t\big|_{t=0} = x^2y^2z^2 + z + 1/[1+(x+y+z)^2].$$

5. ③ Решить задачу: $\Delta u = r^{-3}\cos 2\varphi$, $(r>1,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$,

$$|u(\infty)|<\infty, \qquad (2u-u_r)\big|_{r=1} = 3\cos 2\varphi + 11\sin 9\varphi.$$

6. ⑤ Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda\cdot\int_0^1 [x(3y-2) + (9x-6)y]u(y)\,dy + 4x - 2, \qquad u(x)\in C[0,1].$$

7. ④ Найти $\inf\limits_{u\in M}\left[\int\limits_{|x|<1}\left(|\nabla u|^2 + \dfrac{2u}{|x|}\right)dx\right]$,

где $M = \left\{u(x)\in C^1(|x|\le 1),\ \ u\big|_{|x|=1} = x_1 - x_2 - x_3,\ \ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\right\}.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **111** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФУПМ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{xy=1} = 1, \quad (1<x<2), \qquad u\big|_{y=x} = x^2, \quad (0.25<x<1).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x>0,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = 12x, \qquad u_t\big|_{t=0} = -3, \ (x \ge 0), \qquad (u - u_x)\big|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \ (t \ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0<x<3\pi,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = \cos(x/2), \qquad u_t\big|_{t=0} = x - 3\pi, \qquad (0 \le x \le 3\pi),$$

$$u_x\big|_{x=0} = \sin t, \qquad u\big|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_t = \Delta u - 12 sh2t \cdot shy, \qquad ((x,y,z) \in R^3, \quad t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x^3 shy + (2x+y)\cos(1+y+2x) - yze^{-(z/2)^2}, \qquad ((x,y,z) \in R^3).$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \ (r<1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi), \quad (3u + u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 6\varphi - 5\cos 7\varphi + 3.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^{\pi} \left[\pi \sin x + (1 - 2\cos x)\cos y\right] u(y)\,dy + 1 - 6\cos x, \qquad u(x) \in C[0,\pi].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 2\Delta u + J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3} r\right)\cos 2\varphi + 2J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3} r\right)\sin 5\varphi, \qquad r<3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3} r\right)\sin 5\varphi, \qquad r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=3} = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ t \ge 0,$$

где $\mu_1^{(m)}$ – минимальный положительный корень функции Бесселя $J_m(r)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **112** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФУПМ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xx} + y\cdot u_{xy} + (2y^2+1)\cdot u_x = 0, \qquad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=x^2} = 0, \quad (2<x<5), \qquad u_y\big|_{y=x^2} = \frac{1}{2x}e^{-x^4}, \quad (2<x<5).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $u_{tt} = u_{xx} + 9\sin(2x+t), \quad (x>0,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = xe^x + \sin x + 3\sin 2x, \qquad u_t\big|_{t=0} = -(1+x)e^x + \cos x + 3\cos 2x, \quad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0} = t-1+t^2+4\sin t - 7\cos t, \quad (t\ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_t = u_{xx}, \quad (0<x<\pi/2,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x^2/4 + \cos^2 x, \qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u_x\big|_{x=0} = 0, \qquad u_x\big|_{x=\pi/2} = 0.25\pi e^{-4t}, \qquad (t\ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_{tt} = \Delta u + (x^2+z^2)\cos t, \quad ((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = e^{-(x+y+z)^4}, \quad u_t\big|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)^{5/2} - z^2, \quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу: $\Delta u = 3r^{-4}\cos\varphi, \quad (r>1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi),$

$$|u(\infty)|<\infty, \qquad (4u-u_r)\big|_{r=1} = \cos\varphi + 24\sin 4\varphi.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda\cdot\int_{-1}^{1}\left[\sin^2\pi y + x\cdot(3y+1)\right]u(y)\,dy - 2x + 1, \qquad u(x)\in C[-1,1].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 5\Delta u + J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{7}r\right)\sin\varphi, \qquad r<7,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0} = J_2\left(\frac{\mu_1^{(2)}}{7}r\right)\cos 3\varphi - 3J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{7}r\right)\sin\varphi, \qquad r\le 7,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=7} = 0, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\ t\ge 0,$$

где $\mu_1^{(m)}$ – минимальный положительный корень функции Бесселя $J_m(r)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **113** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФУПМ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ____________________ № группы __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

---

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$(x-1)(y+1)^3 u_{xx} - (x-1)^3(y+1)u_{yy} - (y+1)^3 u_x + (x-1)^3 u_y = 0,\ (x>2,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=0} = 2, \quad (2<x<3), \qquad u\big|_{y=x-2} = x, \quad (2<x<3).$$

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $4u_{tt} = u_{xx} + 150e^{x-2t}, \quad (x>0,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = 8xe^x,\ \ u_t\big|_{t=0} = -9e^x,\ (x\ge 0),\ \ (u-u_x)\big|_{x=0} = 2t - t^2 - 4e^{t/2} - 4,\ (t\ge 0).$$

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx}, \quad (0<x<\pi/2,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x, \qquad u_t\big|_{t=0} = \sin x + 1, \qquad (0\le x\le \pi/2),$$

$$u\big|_{x=0} = t, \qquad u_x\big|_{x=\pi/2} = \cos t, \qquad (t\ge 0).$$

4. (7) Решить задачу Коши: $u_t = \Delta u + 5e^t \cos t\cdot \sin y, \quad ((x,y,z)\in R^3,\ \ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = z^3 \sin y + (x+z)ch(z-y) + (x+y)e^{-(x+y)^2}, \quad ((x,y,z)\in R^3).$$

5. (3) Решить задачу:

$$\Delta u = r^3 \sin 3\varphi, \quad (r<1,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi), \qquad (u+3u_r)\big|_{r=1} = 11\sin 3\varphi + 5\cos 8\varphi - 3.$$

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda\cdot\int_0^{\pi} [\cos x/(\sin y + 2) + (2\sin x + 4)\cos y]u(y)\,dy + \sin x - \cos x + 2,$$

$$u(x)\in C[0,\pi].$$

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 3\Delta u + 3J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{5}r\right)\sin 3\varphi + J_4\left(\frac{\mu_3^{(4)}}{5}r\right)\cos\varphi, \qquad r<5,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0} = J_4\left(\frac{\mu_3^{(4)}}{5}r\right)\sin 3\varphi, \qquad r\le 5,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=5} = 0, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\ t\ge 0,$$

где $\mu_i^{(m)}$ – i-й положительный корень функции Бесселя $J_m(r)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина: **Уравнения математической физики**

Вариант: **114** **Курс:** **3** **Факультет:** **ФУПМ** **2010-2011 уч. г.**

Фамилия студента ______________________ № группы ____________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

---

1. (6) Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

$$x\cdot u_{xy} - y\ln y\cdot u_{yy} - \ln y\cdot u_y = 0,\quad (x>0,\ y>0),$$

$$u\big|_{y=e^x} = x\ln x,\quad (1<x<2),\qquad u_y\big|_{y=e^x} = \sqrt[4]{e}\cdot x^2 e^{-(x+0.5)^2},\quad (1<x<2).$$

---

2. (5) Найти решение смешанной задачи: $u_{tt} = u_{xx} - 3\cos(x-2t),\quad (x>0,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = x\ln(1+x^2) + xchx + \cos x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = 2x^2/(1+x^2) + \ln(1+x^2) - xshx - chx + 2\sin x,\quad (x\ge 0),$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0} = (t-1)\ln(1+t^2) - 2t^2/(1+t^2) - t - 1 + \cos 2t - \sin 2t,\quad (t\ge 0).$$

---

3. (6) Решить смешанную задачу: $u_t = 8u_{xx} - x^2e^{-2t},\quad (0<x<2\pi,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = \pi x + \sin(x/2),\ (0\le x\le 2\pi),\qquad u\big|_{x=0} = 0,\quad u\big|_{x=2\pi} = 2\pi^2e^{-2t},\quad (t\ge 0).$$

---

4. (7) Решить задачу Коши: $u_{tt} = \Delta u + (3\cos 2y - z)\sin t,\quad ((x,y,z)\in R^3,\ t>0),$

$$u\big|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)^{5/2} + x^2\cos 2y,\quad u_t\big|_{t=0} = x^2y^2z^2 + z + 1/[1+(x+y+z)^2].$$

---

5. (3) Решить задачу: $\Delta u = r^{-3}\cos 2\varphi,\quad (r>1,\ 0\le\varphi\le 2\pi),$

$$|u(\infty)|<\infty,\qquad (2u-u_r)\big|_{r=1} = 3\cos 2\varphi + 11\sin 9\varphi.$$

---

6. (5) Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных λ:

$$u(x) = \lambda\cdot\int_0^1[x(3y-2)+(9x-6)y]u(y)\,dy + 4x - 2,\qquad u(x)\in C[0,1].$$

---

7. (4) Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = \Delta u + J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{2}r\right)\sin 5\varphi,\qquad r<2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0,$$

$$u\big|_{t=0} = 2J_5\left(\frac{\mu_3^{(5)}}{2}r\right)\sin 5\varphi + J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{2}r\right)\cos 4\varphi,\qquad r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$u\big|_{r=2} = 0,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\ t\ge 0,$$

где $\mu_i^{(m)}$ – i-й положительный корень функции Бесселя $J_m(r)$.