

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти ортогональную проекцию прямой $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 3y + z - 4 = 0$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = 2\frac{dp}{dx} - p$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{5x+2, 3x+1\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\operatorname{cth} 2x}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1 + \operatorname{th} x)}{\sqrt[3]{1 + x^6 - x^2}} \right)^\alpha dx.$$

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$

ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n\sqrt{x}}}{1 + x\sqrt{n}}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 12}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Найти площадь поверхности

$$z = 2x^2 + 3xy - 2y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда Фурье. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad x^2 + y^2 \leq 4x, \quad y \geq 0, \quad x \leq 2.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $(3x + y^4)y' = y$, проходящую через точку $(1; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 16e^{-3x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=1,2} (e^z - 1) \operatorname{ctg}(z^2) dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти координаты симметричного образа точки $M(1; 3; 2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p(x) + 2p(-x)$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{3x + 2, 6x - 1\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} x}{1+x^2} dx.$$

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ последовательности

$$f_n(x) = \sqrt[3]{x + \frac{1}{nx}}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x^2-8x+15}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Вычислить интеграл

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad \text{где } S : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

в тригонометрический ряд по системе

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G : \quad -2 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $2xy' + 3y + x^4y^3 = 0$, проходящую через точку $(1; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 2e^x.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 4)} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти ортогональную проекцию прямой $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x + y + z - 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

- 2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = 3\frac{dp}{dx} + p$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{3x+5, 2x+3\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 3x}}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} x)}{\sqrt[4]{1 + x^8 - x^2}} \right)^\alpha dx$.

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n+x}}{\frac{n}{x} + 1}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 15}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Найти площадь поверхности

$$z = 3x^2 + 2xy - 3y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда Фурье. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad y \leq x + 1, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $(2x + 3y^5)y' = y$, проходящую через точку $(1; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - 3y'' + 4y = 9e^{-x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{\pi}{4}|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{(e^{2z} - 1)^2} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти координаты симметричного образа точки $M(3; 5; -1)$ относительно прямой $\frac{x-6}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{2}$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{array}{cc} \frac{5}{12} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right\|^{-1}$.

3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p(2x) + p(-x)$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{x+3, 2x-1\}$.

4.④ Построить график функции $y = \left(\frac{x-2}{2x-1}\right)^2$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}.$$

6.③ Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{|\ln \cos \frac{x}{1+x}|}{x^3} \right)^\alpha dx.$$

8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ последовательности

$$f_n(x) = \frac{1}{x^3} \cos \frac{x}{n}.$$

9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \ln \frac{x-3}{x^2-x-20}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Вычислить интеграл

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dS, \quad \text{где } S: z = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad z \leq 2.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

в тригонометрический ряд по системе

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad 0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 4x.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $xy' + 5y - 2x^3y^2 = 0$, проходящую через точку $(1; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - 7y'' + 16y' - 10y = 5e^x.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{\pi}{2}|=2} \frac{e^z - 1}{z \sin z} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти ортогональную проекцию прямой $\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0, \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 5 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p - 2 \frac{dp}{dx}$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{2x + 3, 3x + 4\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \sqrt{|x^2 - 5x + 4|}$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sh} 4x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} dx.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{x}{x+1} \right)}{\sqrt[5]{5 + x^5} - x} \right)^\alpha dx.$$

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$

ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{1}{1+nx}}}{nx}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Найти площадь поверхности

$$z = 4x^2 - xy - 4y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда Фурье. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq x.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $(5x - 3y^2)y' = y$, проходящую через точку $(1; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 2e^{2x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{\pi}{4}|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти координаты симметричного образа точки $M(2; 5; -2)$ относительно прямой $\frac{x-8}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+7}{-6}$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{matrix} 3\sqrt{2} & 12 \\ \frac{2}{3} & \sqrt{2} \end{matrix} \right\|^{-1}$.

3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p(3x) + p(2x)$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{x-1, 3x+4\}$.

4.④ Построить график функции $y = \left(\frac{x+3}{2x-3}\right)^2$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{cth} 4x}.$$

6.③ Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}.$$

7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln \operatorname{ch} \frac{x}{1+x}}{x^4} \right)^\alpha dx.$$

8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ последовательности

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}.$$

9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 2}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Вычислить интеграл

$$\iint_S (2x^2 - 3y^2) dS, \quad \text{где } S: x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq \pi$ в тригонометрический ряд по системе $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$.

Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: x^2 + y^2 + 2x \leq 0, \quad x \geq -1, \quad y \geq 0.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $(2x + y^3)y' = y$, проходящую через точку $(2; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 16e^{3x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=1,1} \frac{1 - e^{-z}}{\sin(z^2)} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти ортогональную проекцию прямой $\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0, \\ x + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + y - z + 2 = 0$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ 15 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = 2\frac{dp}{dx} + p$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{x+4, 3x+11\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \sqrt{|x^2 - x - 2|}$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 5x}}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \operatorname{th} x}{\operatorname{arctg}(e^x - 1)} \right)^\alpha dx.$$

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{x}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{x} + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 15}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Найти площадь поверхности

$$z = 3x^2 - xy - 3y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда Фурье. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 0.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $(x + y^6)y' = y$, проходящую через точку $(\frac{1}{5}; 1)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -4x + 5y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - y'' + 3y' + 5y = 8e^{-x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - i\frac{\pi}{2}|=2} \frac{e^z - 1}{z^2(z^2 + \pi^2)} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти координаты симметричного образа точки $M(-3; 0; 4)$ относительно прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+6}{-3}$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -20 \\ -\frac{3}{2} & 3\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p(-x) + 3p(x)$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{2x + 1, 4x - 3\}$.

4.④ Построить график функции $y = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 2x)^{\frac{1}{\sin^2 6x}}.$$

6.③ Вычислить интеграл

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\operatorname{sh} x}} dx.$$

7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^\alpha x}{\ln^2(1 + \operatorname{ch} x)} dx.$$

8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ последовательности

$$f_n(x) = \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - 10x + 9}{x + 4}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Вычислить интеграл

$$\iint_S \sqrt[3]{x^2 + y^2} dS, \quad \text{где } S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq \pi$ в тригонометрический ряд по системе

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y =$

$= r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 0.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $xy' - 4y - x^3y^2 = 0$, проходящую через точку $(1; -7)$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 5y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' + 3y'' - 4y = 9e^x.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{\pi}{2}i| = 2} \frac{e^z - 1}{z \operatorname{sh} z} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Найти ортогональную проекцию прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 2y + z - 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & -\frac{3}{4} \\ -24 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

- 3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = 2\frac{dp}{dx} + 3p$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{2x - 1, 3x - 2\}$.

- 4.④ Построить график функции $y = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

- 5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{th} 5x)^{\frac{1}{\sin 3x}}.$$

- 6.③ Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 1}}.$$

- 7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)^\alpha}{\sqrt{\ln(1 + \operatorname{sh} x)}} dx.$$

- 8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$

ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n} + \frac{x}{n}}.$$

- 9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 35}{x^3 + 9x^2 + 15x - 25}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Найти площадь поверхности

$$z = 2x^2 + \sqrt{3}xy - 2y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

11.④ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по системе

$$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда Фурье. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad x^2 + y^2 + 2x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq -x.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $xy' + 2y - xy^2 = 0$, проходящую через точку $(1; \frac{1}{2})$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 2e^{-2x}.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{\pi}{4}|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{ch} z - 1} dz.$$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2009/2010 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти координаты симметричного образа точки $M(6; 1; 5)$ относительно прямой $\frac{x-7}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-2}$. Система координат прямоугольная.

2.② Вычислить $\left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 15 \\ \frac{2}{3} & -2\sqrt{7} \end{pmatrix} \right\|^{-1}$.

3.④ В линейном пространстве многочленов $p = p(x)$ степени не выше 1 задано линейное преобразование $\varphi(p) = p(-2x) + p\left(\frac{x}{2}\right)$. Найти матрицу преобразования φ в базисе $\{4x + 2, 2x\}$.

4.④ Построить график функции $y = \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2$. Указать асимптоты, точки экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

5.② Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh} 2x}}.$$

6.③ Вычислить интеграл

$$\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}.$$

7.④ Найти все α , для которых сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{cth} x - 1)^\alpha}{\sqrt{\operatorname{arctg} \ln(1+x)}} dx.$$

8.④ Исследовать сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ последовательности

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{n} - n^2\right).$$

9.④ Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \ln \frac{(x-3)^2}{x^2 - 9x + 20}.$$

Найти радиус сходимости ряда.

10.④ Вычислить интеграл

$$\iint_S (3x^2 + 5y^2) dS, \quad \text{где } S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

11.④ Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{3x}{2}$, $0 \leq x \leq \pi$ в тригонометрический ряд по системе

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

Построить график суммы ряда. Определить, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Ответ обосновать.

12.④ В интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и расставить пределы интегрирования в повторном интеграле двумя способами.

$$G: \quad x \leq y \leq \sqrt{-x^2 - 4x}.$$

13.④ Найти интегральную кривую уравнения $3xy' - y + 3x^2y^4 = 0$, проходящую через точку $(8; \frac{1}{4})$.

14.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$$

15.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 4e^x.$$

16.④ Вычислить интеграл

$$\oint_{|z - \frac{1}{2}|=1} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z-1)^2} dz.$$
