ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс 3 **Семестр** 4 **2009/2010 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$6u_{xx} - 5u_{xy} + u_{yy} - 2u_y + 4u_x = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{y=0} = 1 + x, \quad u_y|_{y=0} = 3, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2\sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x - 2u)|_{x=0} = 4 - 4t, \quad t \geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t = 4u_{xx} + 3u - (1 + \sin x)e^{2t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \qquad u|_{x=0} = e^{2t}, \quad u_x|_{x=\pi} = e^{3t}, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_t = \frac{1}{4}\Delta u + \cos(5x) \cdot e^{t-5z}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = y^3 \operatorname{sh} 2x, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u + 9r = 0, \quad \frac{1}{3} < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=1/3} = 10\sin\varphi - \frac{1}{27}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2\cos 2\varphi - 3, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x) \in C[-\pi;\pi]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (|x| + y\sin x) u(y)\, dy + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$9u_{tt} = \Delta u + f(r)\cos 4\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = J_0\left(\mu_4^{(0)} r\right), \quad u_t|_{t=0} = g(r)\cos 4\varphi, \quad r \leqslant 1; \quad u|_{r=1} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,1]$ функции, $g(1) = f(1) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

8.④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon\ 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}$. Показать, что для всех $u(x_1,x_2) \in C^1(\overline{Q})$, $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_2=1} = \sin x$, имеет место неравенство
$$\iint_Q |\nabla u|^2\, dx_1\, dx_2 > \frac{\pi}{2}.$$

9.④ Найти в $D_1(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 8\frac{du}{dt} + 25u = \frac{d^2 f}{dt^2} - f, \quad f = \frac{1}{2}e^{|t|},$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} 2u_t + 3v_t + 7u_x + 8v_x = 0, \\ u_t + 2v_t + 5u_x + 6v_x = 0. \end{cases}$
Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = \sin x$, $v(x,0) = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс 3 **Семестр** 4 **2009/2010 уч.г.**

Фамилия студента ____________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{x=0} = 1 - 4y, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2e^{2x} - 4, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x - 2u)|_{x=0} = 8t^2 + 8, \quad t \geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t = u_{xx} + 5u - 8x^2 e^t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} e^t, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} = 9\Delta u + xyz\sqrt{1+t}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = ze^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u + 15r\sin 2\varphi = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2\cos 2\varphi - 9\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 1 - 25\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y|\sin|x| + y|x|)u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 4\varphi, \quad r < \frac{1}{4}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = J_4\left(4\mu_4^{(4)} r\right)\cos 4\varphi, \quad u_t|_{t=0} = g(r)\sin 4\varphi, \quad r \leqslant \frac{1}{4}; \quad u|_{r=1/4} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ функции, $f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

8.④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon\ 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, реализующую
$$\inf_{u \in M} \iint_Q (|\nabla u|^2 + 2u\sin x_1)\,dx_1\,dx_2, \quad \text{где} \quad M = \{u \in C^1(\overline{Q}),\ u|_{\partial Q} = 0\}.$$

9.④ Найти в $D_1(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\frac{du}{dt} - 45u = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{2(1+|t|)^2}, \quad f = \frac{1}{2}\ln(1+|t|),$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} 3u_t + 2v_t - 3u_x = 0, \\ u_t + v_t - 5u_x - v_x = 0. \end{cases}$

Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $v(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **4** **2009/2010 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ④ Найти решение задачи
$$2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{y=0} = 1 + x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

---

2. ④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 4\sin x - 4, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x + u)|_{x=0} = 4t^2, \quad t \geqslant 0.$$

---

3. ⑦ Найти решение задачи
$$u_t = u_{xx} + u + e^{x-8t} + x(2-t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = -x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}; \qquad u_x|_{x=0} = t - 1, \quad u_x|_{x=\pi/3} = t - 1, \quad t \geqslant 0.$$

---

4. ④ Найти решение задачи
$$u_{tt} = \Delta u + \sin(x+2y)\cos t, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \operatorname{ch}(3y), \quad u_t|_{t=0} = xe^z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

---

5. ④ Найти решение $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u - 5\sin 3\varphi = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = \sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 3 - 4\sin 3\varphi - \cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

---

6. ④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\sin|y| + (x-1)\sin y) u(y)\, dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

---

7. ④ Найти решение $u(x,y,t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$u_{tt} = 16\Delta u + f(r)\cos 6\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = g(r)\cos 6\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_3^{(0)}}{2} r\right), \quad r \leqslant 2; \quad u|_{r=2} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,2]$ функции, $g(2) = f(2) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$

---

8. ④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}$. Показать, что для всех $u(x) \in C^1(\overline{Q})$, $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\pi} = 0$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_2=1} = \sin 2x_1$, имеет место неравенство
$$\iint\limits_Q |\nabla u|^2\, dx_1\, dx_2 > \pi.$$

---

9. ④ Найти в $D_1(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\frac{du}{dt} + 29u = \frac{d^2 f}{dt^2} + f, \quad f = \frac{1}{2}\sin|t|,$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10. ④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} u_t + 2v_t + 10u_x + 8v_x = 0, \\ u_t + 3v_t + 19u_x + 15v_x = 0. \end{cases}$
Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x,0) = 0$, $v(x,0) = \cos x$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс 3 **Семестр** 4 **2009/2010 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Найти решение задачи
$$u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + 3u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$
$$u|_{x=0} = 1 - 3y, \quad u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

2.④ Найти решение задачи
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \cos x - 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin x + 2, \quad x \geqslant 0; \qquad (u_x - u)|_{x=0} = t^2 - 3, \quad t \geqslant 0.$$

3.⑦ Найти решение задачи
$$u_t = 8u_{xx} + u + (\pi^2 - x - x^2)e^{-t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \qquad u_x|_{x=0} = \operatorname{ch} t, \quad u|_{x=\pi} = \pi \operatorname{ch} t, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Найти решение задачи
$$u_t = \Delta u + ye^{2z-t}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (y - x^4)\sin z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

5.④ Найти решение $u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ задачи
$$\Delta u + 16r\cos\varphi = 0, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=1/2} = 1 - \frac{1}{4}\cos\varphi + \cos 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u_r|_{r=1} = -6\cos\varphi - 2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

6.④ Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при которых уравнение
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(|x| + y)u(y)\,dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
разрешимо при всех λ.

7.④ Найти решение $u(x, y, t) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)$ задачи
$$4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 3\varphi, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_3\left(2\mu_5^{(3)} r\right)\sin 3\varphi, \quad r \leqslant \frac{1}{2}; \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad t \geqslant 0,$$
где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функции, $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, 3, \ldots$

8.④ Пусть $Q = \{x = (x_1, x_2)\colon\ 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найти функцию, реализующую
$$\inf_{u \in M} \iint_Q (|\nabla u|^2 + 2u\sin 2x_1)dx_1\,dx_2, \quad \text{где} \quad M = \{u \in C^1(\overline{Q}),\ u|_{\partial Q} = 0\}.$$

9.④ Найти в $D_1(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение $u(t)$ уравнения
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} - 28u = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{|t|}{(1 + t^2)^2}, \quad f = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}|t|,$$
обращающееся в нуль при $t < 0$.

Для факультета ФАЛТ

10.④ Найдите общее решение системы $\begin{cases} u_t + v_t + 5u_x + 13v_x = 0, \\ 3u_t + 4v_t + 11u_x + 28v_x = 0. \end{cases}$

Решите задачу Коши ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с начальными условиями $u(x, 0) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $v(x, 0) = 0$.
