ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс 3 **Семестр** 6 **2008/2009 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу
$$\begin{cases} x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \\ u|_{y=1} = 3x, \quad u_y|_{y=1} = -x, \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$
Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(2; \dfrac{5}{4}\right)$, если условие $u|_{y=1} = 3x$ изменить на интервале $3 < x < 4$ с сохранением гладкости на $1 < x < 4$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу
$$4u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2e^{2x} - 2x, \quad u_t|_{t=0} = -1;$$
$$u_x|_{x=0} = 2e^t - 2t.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу
$$u_{tt} = u_{xx} + \pi x \cos t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу
$$\Delta u = 9r, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u|_{r=1/2} = -\frac{7}{8} + 2\cos^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 + \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение
$$\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2\sin 3x \sin 6y)\varphi(y)\, dy - 3\cos 9x + 2\sin 9x.$$
Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши $\quad u_{tt} = \Delta u + 2\sin(x + y + z)\sin t,$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = y^3 + z.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи
$$u_t = 2\Delta u + J_1(2\mu_5^{(1)}r)\cos\varphi\cos t, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$
$$u|_{t=0} = f(r)(4\cos\varphi - 3), \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$
где $f(r)$ — гладкая на $[0, 1/2]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = -\frac{1}{6}\begin{cases} (x+5)(y-1), & x \leqslant y, \\ (x-1)(y+5), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\,\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\,\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1 + x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{8\pi}{15} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2008/2009 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} 2yu_{xx} + u_{xy} + 2yu_x + u_y = 0, \\ u|_{x=y^2} = \sin y, \quad -1 < y < 1, \\ u|_{y=0} = 0, \quad -\dfrac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, если условие $u|_{y=0} = 0$ изменить на интервале $0 < x < 1$ с сохранением гладкости на $-\dfrac{1}{2} < x < 1$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = -4;$$
$$u_x|_{x=0} = 2t - \operatorname{sh} 2t.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 25\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 5t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \cos 5x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 8r \sin\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u_r|_{r=1} = 3\sin\varphi + \cos 3\varphi - 2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} \sin(3x - 6y)\varphi(y)\,dy + 15\cos 9x.$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_t = 2\Delta u + (x^2 + 4y^2 - 5z^2)e^t,$$
$$u|_{t=0} = xy^2.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \Delta u + J_2(\mu_4^{(2)} r) \cos 2\varphi \cos(\mu_4^{(2)} t), \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$
$$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_4^{(2)} r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{5}\begin{cases} (x+1)(4-y), & x \leqslant y, \\ (4-x)(y+1), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\,\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\,\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, имеет место неравенство

$$\frac{4\pi}{45} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс **3** **Семестр** **6** **2008/2009 уч.г.**

Фамилия студента ____________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} 2x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0, \\ u|_{y=1} = x, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(2; \dfrac{5}{4}\right)$, если условие $u|_{y=1} = x$ изменить на интервале $2 < x < 4$ с сохранением гладкости на $1 < x < 4$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$9u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 6x, \quad u_t|_{t=0} = 4e^{-3x} + 2; \quad u_x|_{x=0} = -6t + 6e^{-t}.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \pi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 8r\cos\varphi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u_r|_{r=1} = 2\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 8\cos\varphi + 2\sin^2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda\int_0^{\pi/4}(4\cos x\cos 3y + \sin x\sin 3y)\varphi(y)\,dy - \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_{tt} = 3\Delta u + 2(x^3y - xy^3),$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = yze^x.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_t = 4\Delta u + J_2(\mu_3^{(2)}r)\sin 2\varphi\sin 2t, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = f(r)(3\sin 2\varphi - 4), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y)=\frac{1}{7}\begin{cases}(x+6)(1-y), & x\leqslant y,\\ (1-x)(y+6), & x\geqslant y\end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\,\varphi=\lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\,\mathcal{K}(x,y)=\delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y=x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x)\in C^1(|x|\leqslant 1)$, $x\in\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1}=x_1x_2+x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{2\pi}{15}+\int\limits_{|x|<1}u\,dx\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1}|\nabla u|^2dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\textbf{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ **Семестр** $\boxed{6}$ **2008/2009 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} xu_{xy} - yu_{yy} + (x-1)u_y = 0, \\ u|_{x=1} = 1 + y, \quad \dfrac{1}{2} < y < 2, \\ u|_{y=1/x} = 2e^{1-x}, \quad \dfrac{1}{2} < x < 2. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$, если условие $u|_{x=1} = 1 + y$ изменить на интервале $\dfrac{1}{2} < y < 1$ с сохранением гладкости на $\dfrac{1}{2} < y < 2$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2x, \quad u_t|_{t=0} = 12x; \quad u_x|_{x=0} = 2\sin 3t + 6t + 2.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 9\pi x \sin 6t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 10r\cos\varphi\sin\varphi, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u|_{r=2} = 1 + 8\sin 2\varphi - \sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/8} (4\sin 6x\cos 2y - 3\cos 6x \sin 2y)\varphi(y)\,dy + (\pi - 6)\cos 2x + 2(\pi + 1)\sin 2x.$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_t = 4\Delta u + e^{x+z+4t},$$
$$u|_{t=0} = x^3 \cos y.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \Delta u + J_1(2\mu_4^{(1)} r)\sin\varphi \sin(2\mu_4^{(1)} t), \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0, 1/2]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{4}\begin{cases} (x+2)(2-y), & x \leqslant y, \\ (2-x)(y+2), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{14\pi}{15} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$
