

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-4}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x) + 1 - e^x + \arcsin^2 x}{x - \operatorname{sh} x}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^{2\alpha+3}}{\sqrt{1-x^6} \operatorname{tg}^{2+\alpha} x} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{n}}$.

- 6.⑥ Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{1}$.
(Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням $\left(x - \frac{1}{5}\right)$ функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^2(y')^2 + 2y^2) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (0; y^2; 0)$ через внешнюю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{10} + \frac{z}{4} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (z; -x; -y)$ вдоль линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 25$ плоскостью $z = x$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 1)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_1 x_2 + x_3^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = e_1 + 2e_2, \quad e'_2 = e_1 - e_3, \quad e'_3 = 2e_3,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение $y + y' \sin x = y^2(1 - \cos x) \sin x, \quad 0 < x < \pi.$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} - y''' = 1 - e^{-2x}.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 6xy + 10 \quad (x > 0, y > 0).$$

16.⑤ Разложить чётную 4π -периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi], \\ x - \pi, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \cos 2x - \operatorname{arctg} x - x^2}{\ln(1+2x) - \frac{2x}{1+x}}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{3\alpha+2}\sqrt{1+x^5}} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 n^2}{1+x^5 n^3} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{nx^3}}\right)$.

- 6.⑥ Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые с уравнениями $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -t$ и $x = 4t$, $y = 5 - 5t$, $z = 3 + 2t$. (Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \ln(2x^2 + \sqrt{9 + 4x^4})$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^3 (-x^3(y')^2 - 8xy^2) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 9,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (x^2; -5z; 0)$ через внешнюю поверхность одной восьмой части шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (z^2; x^2; y^2)$ вдоль контура треугольника MNP , $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$, в направлении $MNPM$.

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_1x_2 + x_2x_3.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = e_1 - e_2, \quad e'_2 = e_1 + 2e_3, \quad e'_3 = 2e_2,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = e^{-x} + 2.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^2y + y^2 - 4xy + 6 \quad (x > 0, y > 0).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (-2, 0], \\ 2, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 4. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2}{3-x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{x - \ln(1+x)}}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^{3\alpha+2}}{\sqrt[3]{1-x^2} \operatorname{arctg}^{\alpha+1} x} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+n} \operatorname{th} \frac{x}{n}$.

- 6.⑥ Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол, образованный двумя плоскостями: $3x - 4y - z + 5 = 0$, $4x - 3y + z + 5 = 0$. (Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1}{2} + 9x^2}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & -11 & 6 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -19 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_2^3 (x^2(y')^2 + 12y^2) dx, \quad y(2) = \frac{1}{16}, \quad y(3) = \frac{1}{81},$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (x^3; x; -xz)$ через внешнюю поверхность тела, ограниченного параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 1$.

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (z + x; -y; 0)$ вдоль линии пересечения конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостью $x + 3z = 1$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 1)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = e_1 - 2e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_2, \quad e'_3 = -e_1,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y''' = e^{-2x} - 2.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^2 + 2xy^2 - 2xy + 5 \quad (x > 0, y > 0).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2 + 4}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x) + \frac{6x}{2-3x}}{\sqrt[3]{1-x} + \operatorname{sh} \frac{x}{3} - e^{-\frac{x^2}{9}}}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\alpha+2} \operatorname{sh}^\alpha x} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{1+nx}\right)}{\sqrt{1+nx}}$.

- 6.⑥ Составить уравнение прямой, пересекающей под прямым углом ось Ox и прямую $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$. (Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x^2}{\sqrt{9-4x^4}}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (-x^5(y')^2 - 5x^3y^2) dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 4,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (0; x^2 + y^2; z^2)$ через внешнюю поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq 25, \quad 0 \leq z \leq 1$.

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (y^2; z^2; x^2)$ вдоль контура треугольника ABC , $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$, в направлении $ABCA$.

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = e_2 + 2e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_3, \quad e'_3 = -2e_3,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 4y''' = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & x \in (-2\pi, 0], \\ 2\pi, & x \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 4π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2}{x+3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{\frac{1}{1-\operatorname{ch} x}}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^{2\alpha}}{\sqrt{1-x^4} \operatorname{sh}^{\alpha+1} x} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2 + x^4} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$.

- 6.⑥ Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1,0,1)$ на прямую $2x + y + z = 1$, $2y - z = 1$. (Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \ln(3x^2 + \sqrt{4 + 9x^4})$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_2^3 (x^2(y')^2 + 20y^2) dx, \quad y(2) = 16, \quad y(3) = 81,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (0; yz; z)$ через внешнюю поверхность тела, ограниченного параболоидом $6 - z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (2z; 2x; y)$ вдоль линии пересечения конуса $x^2 + y^2 = 9$ плоскостью $z = 2x$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 1)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = -e_1 - 2e_3, \quad e'_2 = -e_2 + e_3, \quad e'_3 = 2e_1,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение

$$\frac{1}{4}y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}, \quad x > 1.$$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} + y''' = -e^{-2x} - 4.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = e^{x/2}(x + y^2).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -3\pi, & x \in (-3\pi, 0], \\ -3\pi + x, & x \in (0, 3\pi) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 6π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = -\frac{9+x^2}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+\sin x} + \sqrt[3]{1-\sin x} - 2}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^3}}$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{5\alpha} \sqrt[3]{1+x^2}} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{5/3} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^3 x^4} \right)$.

- 6.⑥ На плоскости $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ найти точку P , сумма расстояний от которой до точек $A(3, -4, 7)$ и $B(-5, -14, 17)$ была бы наименьшей. (Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 9 & -5 & 5 \\ 3 & 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (-x^4(y')^2 - 10x^2y^2) dx, \quad y(1) = 64, \quad y(2) = 2,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (xz; 0; 0)$ через внешнюю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x + \frac{y}{4} + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (z^2; x^2; y^2)$ вдоль линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ плоскостью $x + y + z = 0$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 1)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -2x_2x_3 - x_1x_2 + x_2^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = -e_2 + e_3, \quad e'_2 = 2e_1 - e_3, \quad e'_3 = -e_2,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение

$$xy dy = (y^2 + x) dx.$$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y''' = -e^{-x} + 3.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

16.⑤ Разложить в тригонометрический ряд Фурье чётную функцию $f(x)$ с периодом 4, равную $x + 3$ при $[-2, 0]$. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) + 2xe^x}{\sqrt[3]{1+x} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{6}x^2}$.

3.⑤ Найти интеграл $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$.

4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x})^{2\alpha} \ln(1+x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^\alpha} dx$.

5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^4 x^2} \operatorname{arctg} \frac{n^3}{x}$.

6.⑥ Составить уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол, образованный двумя плоскостями: $2x - 3y - 4z - 3 = 0$, $4x - 3y - 2z - 3 = 0$. (Система координат декартова прямоугольная.)

7.④ Разложить в ряд по степеням $x - 5$ функцию $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & -6 \\ -1 & 5 & 4 & -8 \\ -5 & 9 & 4 & -24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_2^4 (x^2(y')^2 + 42y^2) dx, \quad y(2) = 1, \quad y(4) = 64,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (-2x - z; 0; -y - z)$ через внешнюю поверхность цилиндрической подковы

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq x.$$

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (x + y; 2z; -z)$ вдоль линии пересечения конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостью $1 + x = 2z$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 1)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_2x_3 - 2x_1x_2 + x_3^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = -2e_2, \quad e'_2 = -e_1 + e_3, \quad e'_3 = 2e_2 - e_3,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение

$$2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}, \quad x > 1.$$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} - 4y''' = -e^{-\frac{x}{2}} + 4.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - 4\sqrt{xy} + 8 \quad (x > 0, y > 0).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-1, 0], \\ x - 2, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{16 + x^2}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - e^{\operatorname{sh} x}}{(\cos \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x})^3}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$.

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{2\alpha+1} \sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x}}{n} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$.

- 6.⑥ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(3, -2, -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
(Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4+9x^2}{4-9x^2}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{x^4} (y')^2 - \frac{14}{x^6} y^2 \right) dx, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y(1) = 64,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (0; 0; z^2)$ через внешнюю поверхность части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, лежащей внутри конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (x^2 + y^2; y^2 + z^2; z^2 + x^2)$ вдоль контура треугольника ABC , $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$, в направлении $ABCA$.

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_2 x_3 - 2x_1 x_2 - x_1^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = -2e_2 + e_3, \quad e'_2 = -e_3, \quad e'_3 = 2e_1 - e_2,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение $y' = y^4 \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 18 - e^{-x}.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad \left(-1 < x < \frac{1}{2} \right).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = 1 - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = \frac{x^2}{5-x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \arcsin x) - x \cos \sqrt{x}}{\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x}$.

- 3.⑤ Найти интеграл $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

- 4.③ Найти интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^{3\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^2} \arcsin^{\alpha+1} x} dx$.

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{x^2 + n} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$.

- 6.⑥ Составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-5}{2}$.
(Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - 4x^2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^2(y')^2 + 72y^2) dx, \quad y(1) = 64, \quad y(2) = \frac{1}{8},$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (x^2 + y^2; y^2 + z^2; z^2 + x^2)$ через внешнюю поверхность цилиндра

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad 8 \leq z \leq 12.$$

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (0; z + y; z - x)$ вдоль линии пересечения конуса $z = x^2 + y^2$ плоскостью $x + y + z = 1$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 2)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_3 + 2x_1x_2 - x_1^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = e_1 - 2e_3, \quad e'_2 = e_2 - e_3, \quad e'_3 = -e_2,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение $(x + 1)(y' + y^2) = -y, \quad x > -1.$

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} + 9y''' = -243e^{3x} - 6.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (-4, 0], \\ 2, & x \in (0, 4) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 8. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2007/2008 уч.г.
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

- 1.③ Построить график функции $y = -\frac{x^2 + 25}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.④ Найти предел
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x}{2} - e(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{1 + \operatorname{sh} x} + \sqrt[4]{1 - \operatorname{sh} x} - 2}.$$

- 3.⑤ Найти интеграл
$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{16 + x^2}} dx.$$

- 4.③ Исследовать на сходимость интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(\sqrt{x})^{3\alpha} (\operatorname{sh} x)^{\alpha+1}} dx.$$

- 5.④ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x}}{n} \right) \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt[3]{n}}.$$

- 6.⑥ Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через прямые
$$\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \quad \begin{cases} x - 13y + 37 = 0, \\ 4y + z - 9 = 0 \end{cases}.$$

(Система координат декартова прямоугольная.)

- 7.④ Разложить в ряд по степеням $x - 3$ функцию
$$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$$
 и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & -9 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.④ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^3(y')^2 + 15xy^2) dx, \quad y(1) = 64, \quad y(2) = 2,$$

и исследовать на экстремум, определив знак приращения.

10.⑤ Найти поток поля $\mathbf{a} = (xz; 0; 0)$ через внешнюю поверхность тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 = 2 - z$ и плоскостью $z = 0$.

11.⑤ Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (y^2; z^2; x^2)$ вдоль линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ плоскостью $x + y + z = 2$ (обход против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0; 0; 3)$).

12.③ Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -2x_2x_3 + 2x_1x_3 - x_2^2.$$

Записать квадратичную форму $K(x_1, x_2, x_3)$ в базисе

$$e'_1 = -2e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_3, \quad e'_3 = 2e_1 - e_2,$$

где e_1, e_2, e_3 — базис, в котором задана квадратичная форма $K(x_1, x_2, x_3)$.

13.④ Решить уравнение $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0, \quad x > 0$.

14.③ Найти общее вещественное решение уравнения

$$y^{(5)} + 8y^{(4)} + 16y''' = -4e^{-2x} - 2.$$

Указать частное решение уравнения и фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

15.③ Найти стационарные точки и исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad (x > 0, y > 0).$$

16.⑤ Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2, 0], \\ x + 2, & x \in (0, 2) \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 4. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).
