

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **81** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФОПФ** 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$8x^2u_{xx} - 2y^2u_{yy} + 6xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y + y^{-1/2}, \quad u_x|_{x=y} = -1, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = t^2 + (1+t)\sin t + t\cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4}\cos\frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x - \frac{3}{5}\cos\frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r > 2, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$
$$u|_{r=2} = \sin^4\varphi, \quad |u|_{r=\infty} < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = xyz \cos x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Показать, что для всех функций $u(x) = u(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{m} = \{u(x) \in C^1(|x| \leq 1), u|_{|x|=1} = x_1 - 2x_2 + x_3\}$ имеет место неравенство

$$12 \int_{|x|<1} u dx + \frac{24}{5}\pi \leq \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **82** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФОПФ** 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$2x^2 u_{xx} - 8y^2 u_{yy} + xu_x - 6yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^3 + y^{1/4}, \quad u_x|_{x=y} = 2y^2, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - te^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = 2t + \sin t - \cos t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u + t(x-1) + x(1 - \pi^2 t) + \frac{8}{9\pi^2} t \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad u_r|_{r=2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = (t-x) \cdot e^{t-x}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = y(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Показать, что для всех функций $u(x) = u(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{m} = \{u(x) \in C^1(|x| \leq 1), u|_{|x|=1} = x_1^2\}$ имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{32}{45} \pi.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **83** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФОПФ** 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$9x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 15xu_x + yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^2 + y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = -\frac{1}{3}y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$
$$(u + u_x)|_{x=0} = (t - 1) \sin t + t \cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1 + x) - \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \pi(1 + x) - \frac{4}{5} \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$$
$$u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{16}{r^2} \sin \left(4\varphi + \frac{\pi}{3} \right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u|_{r=1/2} = 8 \cos^4 \varphi, \quad |u|_{r=\infty} < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = e^{t+x+y} \cos z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = (x + y + z) \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-4|x|^2 + 12|y|^2) \varphi(y) dy + 2(|x|^2 + \alpha), \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Показать, что для всех функций $u(x) = u(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{m} = \{u(x) \in C^1(|x| \leq 1), u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\}$ имеет место неравенство

$$\int_{|x| < 1} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{128}{45} \pi.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **84** Курс **3** Семестр **6** Факультет **ФОПФ** 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geq 0;$$
$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx} + 2u + tx - 2(x + 1) - \frac{16}{\pi^2} t \sin \frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + 2 \sin \frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$
$$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=2} = 1, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi, \quad u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = \frac{1}{1 + (t + x)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = yz(y - z), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-12|x|^2 + 20|x||y|) \varphi(y) dy + \alpha|x|^2 + |x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Показать, что для всех функций $u(x) = u(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{m} = \{u(x) \in C^1(|x| \leq 1), u|_{|x|=1} = x_1 x_2 + x_3^2\}$ имеет место неравенство

$$\int_{|x| < 1} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{56\pi}{45}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **81** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФМБФ, ФПФЭ**
2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$8x^2 u_{xx} - 2y^2 u_{yy} + 6xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y + y^{-1/2}, \quad u_x|_{x=y} = -1, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = t^2 + (1+t) \sin t + t \cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4} \cos \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x - \frac{3}{5} \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{8}{r^2} \cos \left(4\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad r > 2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u|_{r=2} = \sin^4 \varphi, \quad |u|_{r=\infty} < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = xyz \cos x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение уравнения $\frac{d^3 \mathcal{E}}{dt^3} - \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} - 2 \frac{d \mathcal{E}}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$.

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённую производную $\frac{d^4 \mathcal{E}}{dt^4}$.

При каких m обобщённые производные $\frac{d^m \mathcal{E}}{dt^m} \in D'(\mathbb{R}^1)$ являются: а) регулярными обобщёнными функциями и б) сингулярными обобщёнными функциями?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **82** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФМБФ, ФПФЭ**

2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$2x^2 u_{xx} - 8y^2 u_{yy} + xu_x - 6yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^3 + y^{1/4}, \quad u_x|_{x=y} = 2y^2, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - te^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = 2t + \sin t - \cos t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u + t(x-1) + x(1 - \pi^2 t) + \frac{8}{9\pi^2} t \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad u_r|_{r=2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = (t-x) \cdot e^{t-x}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = y(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение уравнения $\frac{d^3 \mathcal{E}}{dt^3} + 2 \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} - 3 \frac{d \mathcal{E}}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$.

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённую производную $\frac{d^4 \mathcal{E}}{dt^4}$.

При каких m обобщённые производные $\frac{d^m \mathcal{E}}{dt^m} \in D'(\mathbb{R}^1)$ являются: а) регулярными обобщёнными функциями и б) сингулярными обобщёнными функциями?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **83** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФМБФ, ФПФЭ**

2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$9x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 15xu_x + yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$

$$u|_{x=y} = y^2 + y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = -\frac{1}{3}y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$

$$(u + u_x)|_{x=0} = (t - 1) \sin t + t \cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1 + x) - \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi(1 + x) - \frac{4}{5} \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{16}{r^2} \sin \left(4\varphi + \frac{\pi}{3} \right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$u|_{r=1/2} = 8 \cos^4 \varphi, \quad |u|_{r=\infty}| < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = e^{t+x+y} \cos z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = (x + y + z) \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-4|x|^2 + 12|y|^2) \varphi(y) dy + 2(|x|^2 + \alpha), \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение уравнения $\frac{d^3 \mathcal{E}}{dt^3} - 2 \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} - 3 \frac{d \mathcal{E}}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$.

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённую производную $\frac{d^4 \mathcal{E}}{dt^4}$.

При каких m обобщённые производные $\frac{d^m \mathcal{E}}{dt^m} \in D'(\mathbb{R}^1)$ являются: а) регулярными обобщёнными функциями и б) сингулярными обобщёнными функциями?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **84** Курс **3** Семестр **6** Факультеты **ФМБФ, ФПФЭ**

2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geq 0;$$
$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx} + 2u + tx - 2(x + 1) - \frac{16}{\pi^2} t \sin \frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + 2 \sin \frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$
$$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=2} = 1, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi, \quad u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = \frac{1}{1 + (t + x)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = yz(y - z), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-12|x|^2 + 20|x||y|) \varphi(y) dy + \alpha|x|^2 + |x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённое решение уравнения $\frac{d^3 \mathcal{E}}{dt^3} + \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt^2} - 2 \frac{d \mathcal{E}}{dt} = \delta(t)$, обращающееся в нуль при $t < 0$.

Вычислить в $D'(\mathbb{R}^1)$ обобщённую производную $\frac{d^4 \mathcal{E}}{dt^4}$.

При каких m обобщённые производные $\frac{d^m \mathcal{E}}{dt^m} \in D'(\mathbb{R}^1)$ являются: а) регулярными обобщёнными функциями и б) сингулярными обобщёнными функциями?

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **81** Курс **3** Семестр **6** Факультеты

ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$8x^2 u_{xx} - 2y^2 u_{yy} + 6xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y + y^{-1/2}, \quad u_x|_{x=y} = -1, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = t^2 + (1+t) \sin t + t \cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4} \cos \frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x - \frac{3}{5} \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{8}{r^2} \cos \left(4\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad r > 2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u|_{r=2} = \sin^4 \varphi, \quad |u|_{r=\infty} < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = xyz \cos x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} (6|x|^2 - 2|y|^2) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin^2 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$

$$u|_{t=0} = g(r) \cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{03}r), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty,$$

где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0, 1]$ функции, μ_{kj} — j -й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **82** Курс **3** Семестр **6** Факультеты

ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$2x^2 u_{xx} - 8y^2 u_{yy} + xu_x - 6yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^3 + y^{1/4}, \quad u_x|_{x=y} = 2y^2, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - te^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}, \quad x \geq 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = 2t + \sin t - \cos t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u + t(x-1) + x(1 - \pi^2 t) + \frac{8}{9\pi^2} t \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{64}{r^5} \sin \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad u_r|_{r=2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = (t-x) \cdot e^{t-x}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = y(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (10|x|^2 - 6|x||y|) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha|x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(4 + \sin 3\varphi) \cos \varphi, \quad r < 2, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$
$$u|_{t=0} = J_2\left(\frac{\mu_{24} r}{2}\right) \sin 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = f(r) \sin 4\varphi, \quad u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0, 2]$ функция, μ_{kj} — j -й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **83** Курс **3** Семестр **6** Факультеты

ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$9x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + 15xu_x + yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$

$$u|_{x=y} = y^2 + y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = -\frac{1}{3}y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$

$$(u + u_x)|_{x=0} = (t - 1) \sin t + t \cos t, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1 + x) - \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi(1 + x) - \frac{4}{5} \sin \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 3\pi;$$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{16}{r^2} \sin \left(4\varphi + \frac{\pi}{3} \right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$u|_{r=1/2} = 8 \cos^4 \varphi, \quad |u|_{r=\infty} < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = e^{t+x+y} \cos z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = (x + y + z) \sin x, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-4|x|^2 + 12|y|^2) \varphi(y) dy + 2(|x|^2 + \alpha), \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = \Delta u + f(r) \cos^2 3\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$

$$u|_{t=0} = J_0 \left(\frac{\mu_{04} r}{2} \right), \quad u_t|_{t=0} = g(r) \sin 3\varphi, \quad u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0} < \infty,$$

где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0, 2]$ функции, μ_{kj} — j -й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Вариант **84** Курс **3** Семестр **6** Факультеты

ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geq 0;$$
$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geq 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0, t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx} + 2u + tx - 2(x + 1) - \frac{16}{\pi^2} t \sin \frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + 2 \sin \frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$
$$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=2} = 1, \quad t \geq 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$
$$u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi, \quad u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = \frac{1}{1 + (t + x)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = yz(y - z), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (-12|x|^2 + 20|x||y|) \varphi(y) dy + \alpha|x|^2 + |x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

7.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(2 + \sin \varphi) \sin \varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r, \varphi, t);$$
$$u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_{21}r) \cos 2\varphi, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0, 1]$ функция, μ_{kj} — j -й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.