

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x-4)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\ln(1+x) - \operatorname{tg} x}$. | 3.④ Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} dx$.

- 4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (3x^2 + x^3)^\alpha \ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right) dx.$$

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n \sin x) \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^{3/2}} \right).$$

- 6.④ Разложить функцию $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 7.③ Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1,2,1)$ параллельно прямой $x - y + z + 3 = 0$, $2x + 4y + 5 = 0$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 10x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $xy' + y + y^2(1+x) = 0$, $x > 0$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{3x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^e (x^2 y'^2 - 2xyy' + y^2 + 4y \ln x) dx, \quad y(1) = -0,5, \quad y(e) = -1,5,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^4 + 3y^2 - 8x^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена прямыми $y = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} e^x dx - (x^3 + y) dy, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 1.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \sin x$, $-1 < x < 1$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^2 + 8x + 2}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2}}{\cos x} \right)^{\frac{\sin x}{x^3}}$.

3.④ Вычислить $\int \frac{dx}{x^{4/3} - x}$.

- 4.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^{\alpha+2} \ln^\alpha x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{nx} \sin \left(\frac{1}{n^2 x^2} \right).$$

- 6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2+3x}{1-6x} \right)$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 7.③ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0,1,1)$ и прямую $x = -1 + 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = 2 - t$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = 8x_2^2 + x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' = -3x^2y + x^2 \sin(e^{x^3})$.

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 16y^2 + 2e^4xy) dx, \quad y(0) = \frac{1}{64},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + xy^2 - y^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$, $x = 0$ ($x > 0$). Вычислить двойной интеграл $\iint_D 2xy \, dx \, dy$.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (3x - 1 + z) dS, \quad S : 3x + 2y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \pi + x$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Построить график функции $y = f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - \operatorname{ch} x - x}{\sqrt[3]{8 + x^3} - 2}$. 3.④ Вычислить $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

- 4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (1+x)^{\alpha-1} \ln^{\alpha}(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx.$$

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x 2^n \operatorname{th} \left(\frac{x}{4^n} \right).$$

- 6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = \frac{5-y}{4} = \frac{z+2}{3}$ параллельно прямой $\frac{x+5}{2} = z-1, y=2$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $(1 + x^2)y' = xy + \sqrt{1 + x^2}$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + 2y' + y = (x + 2)e^{-x}.$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 - 4xyy' + 10y^2 + 12x^2y) dx, \quad y(1) = 15, \quad y(2) = -3,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 2y.$$

14.④ Область D на плоскости задана неравенствами $y > x$, $x > 0$, $x^2 + y^2 < 2y$. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$.

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} (2x - y) dx + (x^2 + y) dy, \quad \Gamma = ABCA, \quad A(1,0), \quad B(1,3), \quad C(2,3).$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{(x-4)^3}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \operatorname{tg} x - e^{x^3}}{\frac{1}{1+2x^3} - 1}$.

3.④ Вычислить $\int \frac{\ln^2(1 + \ln x)}{x} dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^\alpha} \sin^{2\alpha+2} \left(\frac{1}{x+1} \right) dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} xn^2 e^{-nx}$.

6.④ Разложить функцию $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x + \ln(1+x^2)$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2, 0, 4)$ перпендикулярно плоскости $x = 3 - u + 3v$, $y = -1 + 2u$, $z = 2 + 4u - v$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 6, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 6x_1x_2.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' + \frac{2}{x^2 - 1}y + \frac{x^2 - x}{x + 1}y^2 = 0, \quad x > 1.$

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - 9y^2 + 36xy) dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 2x^2 - x^4 - y^2.$$

14.④ Область D на плоскости задана неравенствами $x^2 + y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 + 2y < 0$. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S z^2 dS, \quad S : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{\sin^2 x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ | 3.④ Вычислить $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

- 4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x(x-1)^{3\alpha} \operatorname{arctg}(x-1)}{\ln^\alpha x} dx.$$

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} \ln \frac{n+x}{n}.$$

- 6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arcsctg} \frac{3-3x}{1+9x}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 0)$ и прямую $x - z - 1 = 0$, $2x - y + z - 1 = 0$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 10x_2 - 12x_3 = 8. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - 2x_2^2.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $(\sqrt{x} + x)y' = y + (\sqrt{x} + 1)^2$, $x > 0$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + y = 2 \cos x + 8 \sin x.$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^e (-x^2 y'^2 + 2xyy' - 5y^2 + (12 \ln x + 4)y) dx, \quad y(1) = 0,5, \quad y(e) = 1,5,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} + 2y^2 + x^2y - x^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (\sin x + y) dx dy.$$

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} (y + \sin x) dx - xy^2 dy, \quad \Gamma: x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = x$, $-1 < x < 1$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \operatorname{ch} x - 1}{\frac{x^2}{1-2x^2} - \sin^2 x}$. | 3.④ Вычислить $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^{2\alpha}(1+x)}{x^{3\alpha-1}\sqrt{1+x^5}} dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2x}}{1+n^2 x^2}.$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 1})$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 1, -3)$ перпендикулярно прямой $2x - 3y + z = 0$, $2x - y + 4z - 5 = 0$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = -4. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - 4x_2 x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $(e^x + 1)y' = e^x y + (e^x + 1) \operatorname{sh} x$.

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (y'^2 - y^2 - 10xy) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - \frac{15\pi}{2},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = -y^4 + 8y^2 - x^4 - 2x^2.$$

14.④ Область D на плоскости задана неравенствами $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + y^2 < 2y$, $x > 0$. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x dx dy$.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x - y - z) dx dy, \quad S \text{ — верхняя сторона } x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x) - 2 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4 - x^2} - 2}$.

3.④ Вычислить $\int e^{4x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)^\alpha \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\operatorname{th}^\alpha x} dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{nx+1}{nx} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{nx}.$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(0,1,4)$ параллельно плоскостям $2x+y-3z+5=0$, $-x+4y+z=0$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' + \frac{2x}{1+x^2}y + y^2x^4 = 0$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения $y'' + y' - 6y = 5xe^{2x}$.

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^3 (x^2y'^2 - 4x^2yy' - 4xy^2 - 4x^2y) dx, \quad y(1) = \frac{2}{3}, \quad y(3) = -2,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = y^2 - y^4 + x^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = -3$. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} x^2y dx - \ln(2+y) dy, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = 1 \text{ (при } y \geq 0), y = 0 \text{ (при } -1 \leq x \leq 1).$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = 1 - x$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x - \operatorname{tg} 5x}{\ln(1-x)} \right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$.

3.④ Вычислить $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} \ln^{3\alpha+1} x}{(x-1)^\alpha} dx$.

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) e^{-nx^2}.$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2-4x}{1+8x} \right)$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -2, 3)$ и прямую $x = -1$, $y = 2 + 3t$, $z = -1 + t$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 11, \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $x(\ln x + 1)y' = -y + \frac{1}{\ln x + 1}$, $x > \frac{1}{e}$.

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (2e^2xy - y'^2 - 4y^2) dx, \quad y(0) = -\frac{1}{8},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x^2 + xy^2 + 3y^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $y = 0$, $y = x$ и $y = \sqrt{2-x}$. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 2x^2y dx dy$.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S z^2 dS, \quad S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\{1, \cos x, \dots, \cos nx, \dots\}$. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

- 1.④ Построить график функции $y = f(x) = x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

- 2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\ln(2 + \operatorname{sh} x) - \ln 2}$. 3.④ Вычислить $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x} dx$.

- 4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (1 + x^4)^{\alpha/2} \ln(1 + x^2) \operatorname{tg}^{\alpha} \left(\frac{x}{2 + x} \right) dx.$$

- 5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{xn}}{1 + n^3x^3}.$$

- 6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + 3x}{1 - 3x}}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

- 7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $x - 1 = \frac{y + 1}{2} = 1 - z$ параллельно прямой $\frac{x}{3} = \frac{y + 4}{5} = \frac{z}{2}$.

- 8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 3, \\ -2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - x_3^2 - 4x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' = y \operatorname{th} x + e^x$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = (6x - 2)e^{-2x}.$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left(x^2 y'^2 - 4xyy' + 4y^2 + \frac{4}{x}y \right) dx, \quad y(1) = \frac{2}{3}, \quad y(2) = \frac{23}{6},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 + x^2 - 2x.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $y = 1$ и $y = x^2$.

Вычислить двойной интеграл $\iint_D x^2 y \, dx \, dy$.

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} (x - y^2) \, dx + e^x \, dy, \quad \Gamma = ABCA, \quad A(0,1), \quad B(2,1), \quad C(2,3).$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{(2-x)^3}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{\cos x - \operatorname{ch} x}$. | 3.④ Вычислить $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \ln^\alpha(\operatorname{ch} x)}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x \ln(1 + x3^{-n}).$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3,4,5)$ перпендикулярно плоскости $x = 8 + 2u$, $y = -3 + u - v$, $z = 5 - 3u + 2v$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' + y \operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{y^2} = 0$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^\pi \left(y'^2 - \frac{25}{4}y^2 + 50xy \right) dx, \quad y(0) = -1, \quad y(\pi) = 4\pi,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = y^2 - 2y^4 + 3x^2.$$

14.④ Область D на плоскости задана неравенствами $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + 2x + y^2 < 0$. В двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x^4 + y^4) dS, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \cos x$, $-1 < x < 1$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 4}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \cos x + \sin^2 x + \sqrt[3]{1+x^2})^{\operatorname{ctg} x^2}$.

3.④ Вычислить $\int \operatorname{tg}^2(1+e^x)e^x dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)^\alpha e^{\alpha x} dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{nx})}{(nx)^{\frac{3}{2}}}.$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arcsctg} \frac{1-10x}{2+5x}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,0,1)$ и прямую $x - y + 2z - 2 = 0$, $2x + y - z - 2 = 0$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 - x_1^2 + 2x_1x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение $y' = 4xy \operatorname{tg} x^2 + x \operatorname{tg} x^2$, $\left(0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

11.④ Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + 9y = 6 \cos 3x - 3 \sin 3x.$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (-x^2 y'^2 + 4xyy' + 10x^3y) dx, \quad y(1) = 3,5, \quad y(2) = -3,$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} - y^2 + x^2y + 3x^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $y = x + 1$, $y = \frac{2}{x}$ и $y = 1$. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 2xy \, dx \, dy$.

15.⑤ Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} xy^2 \, dx - y \, dy, \quad \Gamma: y = \sqrt{x}, y = x^3, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = 1 - |x|$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
2006/2007 уч.г.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Фамилия студента _____

№ группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.④ Построить график функции $y = f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2.③ Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + 1 - e^x + \operatorname{tg} x^2}{x - \sin x}$.

3.④ Вычислить $\int e^{-x} \ln(1+e^x) dx$.

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{(3+x^4)^{\alpha/2} \operatorname{th}^{3\alpha} x}{\ln^{\alpha-2}(1+x)} dx.$$

5.③ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\sqrt{n} \cdot \sin\left(\frac{x^3}{n^2}\right).$$

6.④ Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arccctg} \frac{2x^2}{\sqrt{1-4x^4}}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7.③ Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,1,0)$ и прямую $x = 2, \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{2}$.

8.③ Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9.⑤ а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - 2x_1 x_2.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = 3\mathbf{e}_2\}.$$

10.④ Решить уравнение

$$(1 + \sin x)y' = y \cos x + (1 + \sin x) \operatorname{ctg} x, \quad (0 < x < \pi).$$

11.④ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y, \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$$

12.⑥ Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{2\pi} \left(y^2 - \frac{9}{4}y'^2 - 2xy \right) dx, \quad y(0) = -1, \quad y(2\pi) = 2\pi + \frac{1}{2},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13.④ Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^4 + 2y^2.$$

14.④ Область D на плоскости ограничена линиями $x^2 + y^2 < 2x$, $y > x$.

Вычислить двойной интеграл $\iint_D x \, dx \, dy$.

15.⑤ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S z \, dx \, dy, \quad S \text{ — внешняя сторона : } x^2 + y^2 = z^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

16.⑤ Разложить функцию $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе функций $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).
