ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1.② Вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\,.$$

2.② Вычислить расстояние от параболоида

$$P = \left\{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 2z = x^2 + y^2\ \right\}$$

до плоскости

$$\Pi = \left\{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 2x + 4y - z = 31\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

3.③ Найти решение задачи Коши

$$2y''(x) = \big(y'(x)\big)^2 + \exp\big(2y(x)\big)\,, \quad x > 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1,$$

и вычислить несобственный интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \exp\big(3y(x)\big)\ dx.$$

4.② Поверхность

$$S = \left\{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = -\sqrt{x^2+y^2} \geq -1\ \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси Oz. Система координат декартова прямоугольная. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F} = \frac{(x, y, -z)}{1 + z^2}$$

через поверхность S.

5.② Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 2]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [1/4, +\infty) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t \in (0, 1/4). \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = XY$ и математическое ожидание случайной величины Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1.② Вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\,.$$

Ответ: π.

Решение: Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\frac{dx}{x} \boxed{=}$$

Делаем замену

$$t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad x=\frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}, \quad 0\le t<+\infty,$$

получаем

$$\boxed{=} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)}{t^2}\,\frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg}(t)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = \pi.$$

Инструкция: После замены переменной получен интеграл от рациональной функции — одно очко.

2.② Вычислить расстояние от параболоида

$$P=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 2z=x^2+y^2\ \right\}$$

до плоскости

$$\mathit{\Pi}=\left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 2x+4y-z=31\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\sqrt{21}$.

Решение: Если существует точка $(x,y,z)\in P\cap\mathit{\Pi}$, то

$4x+8y-62=x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad 0\le(x-2)^2+(y-4)^2=-42<0$ — противоречие.

Следовательно, $P\cap\mathit{\Pi}=\varnothing$. Пусть $(x,y,z)\in P$ — точка параболоида, ближайшая к плоскости. Тогда нормаль к параболоиду P в этой точке является и нормалью к плоскости $\mathit{\Pi}$. Следовательно, существует $a\in\mathbb{R}$, такое, что

$$(2x,2y,-2)=a(2,4,-1), \quad\Rightarrow\quad a=2, \quad x=2, \quad y=4, \quad z=10.$$

Теперь ищем $t \in \mathbb{R}$ вида

$$(2,4,10) + t(2,4,-1) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad 2(2+2t) + 4(4+4t) - (10-t) = 31$$

$$\Downarrow$$

$$21\,t = 21 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(P,\Pi) = \big|(2,4,-1)\big| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}.$$

Инструкция: Найдена точка параболоида, ближайшая к плоскости — одно очко.

3. 3 Найти решение задачи Коши

$$2y''(x) = \big(y'(x)\big)^2 + \exp\big(2y(x)\big), \quad x > 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1,$$

и вычислить несобственный интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \exp\big(3y(x)\big)\, dx.$$

Ответ: $y(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right), \quad I = \dfrac{1}{2}.$

Решение: Замена $y'(x) = z(y(x)) \quad \Rightarrow \quad y''(x) = z'(y)y'(x) = z'(y)z(y)$

$$\Downarrow$$

$$2z'(y)z(y) = (z(y))^2 + \exp(2y), \quad z(0) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dy} z^2(y) = z^2(y) + \exp(2y), \quad z^2(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$z^2(y) = C\exp(y) + \exp(2y), \quad z^2(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z(y) = -\exp(y) = y'(x), \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(-y) = x + 1$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \ln\frac{1}{x+1}, \quad x \geq 0, \quad \Rightarrow \quad I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2(x+1)^2}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Инструкция: Понижен порядок уравнения и найдена $y'(x)$ — одно очко. Найдено решение $y(x)$ — одно очко. Найден интеграл I — одно очко.

4.② Поверхность

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -\sqrt{x^2+y^2} \geq -1 \right\}$$

ориентирована полем нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси Oz. Система координат декартова прямоугольная. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F} = \frac{(x, y, -z)}{1+z^2}$$

через поверхность S.

Ответ: $\pi(4-\pi)$.

Решение: *Первый способ.* Единичная нормаль $\vec{n}$ к поверхности S в точке $(x,y,z) \in S$ параллельна вектору

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$. Поток $\vec{F}$ через поверхность S равен

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right)\, dS = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \right) \frac{dx\, dy}{1+x^2+y^2} =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \overset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{2\, r^2\, dr}{1+r^2} =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2} \right)\, dr = 4\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \pi(4-\pi).$$

Второй способ. Параметризуем поверхность S полярными координатами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = -r, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Векторное поле $\vec{F}$ в полярных координатах имеет вид

$$\vec{F} = \frac{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)}{1+r^2}.$$

Единичная нормаль $\vec{n}$ к поверхности S в точке $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, -r) \in S$ параллельна вектору

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $dS = \sqrt{2}\, r\, dr\, d\varphi$. Поток $\vec{F}$ через поверхность S равен

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right)\, dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\, dr\, \frac{\left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi + r\right)}{1+r^2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{2r^2\, dr}{1+r^2} = \int\limits_0^1 \frac{4\pi\, r^2\, dr}{1+r^2} =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr = 4\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi(4-\pi).$$

Третий способ. Рассмотрим область

$G = \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ -1 < z < -\sqrt{x^2+y^2}\ \right\}$ с границей $\partial G = S \cup S_0$, где

$S_0 = \left\{\ (x,y,-1)\ :\ x^2+y^2 \le 1\ \right\}$ ориентирована полем $\vec{n}_0 = (0,0,-1)$.

Тогда по теореме Гаусса получаем

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \int\limits_{\partial G} \left(\vec{F}, d\vec{S}\right) - \int\limits_{S_0} \left(\vec{F}, \vec{n}_0\right) dS = \int\limits_G \operatorname{div}\vec{F}\, dV - \int\limits_{S_0} \left(\vec{F}, \vec{n}_0\right) dS.$$

Имеем

$$\int\limits_{S_0} \left(\vec{F}, \vec{n}_0\right) dS = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ z=-1}} \frac{z\, dx\, dy}{1+z^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^2} - \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z^2}\right) = \frac{2}{1+z^2} - \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z^2}\right),$$

$$\int\limits_G \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint\limits_{-1<z<-\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz \overset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_{-1}^{-r} dz \left(\frac{2}{1+z^2} - \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)\right) =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 r\, dr \left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}(r) + \frac{r}{1+r^2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \operatorname{arctg}(r)\, dr^2\right) = 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{4} + \int\limits_0^1 \frac{r^2\, dr}{1+r^2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi\left(\frac{7}{2} - \pi\right).$$

Тогда поток $\vec{F}$ через поверхность S равен

$$\int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) \, dS = \pi \left(\frac{7}{2} - \pi\right) + \frac{\pi}{2} = \pi(4 - \pi).$$

Инструкция: При решении по определению (например, первый или второй способы): поток векторного поля выражен двойным интегралом в терминах какой-либо параметризации поверхности — одно очко, вычислен полученный двойной интеграл — одно очко.
При решении по теореме Гаусса (третий способ): вычислен поток через границу области G с помощью теоремы Гаусса — одно очко, вычислен поток через основание S_0 и найдена его разность с потоком через ∂G — одно очко.

5. 2 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 2]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [1/4, +\infty) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t \in (0, 1/4). \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = XY$ и математическое ожидание случайной величины Z.

Ответ: $\rho_Z(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ \sqrt{\frac{2}{t}} - 2, & t \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{cases}$ $\qquad M(Z) = \dfrac{1}{12}.$

Решение: Вычислим функцию распределения случайной величины Z. При любом $t \le 0$ очевидно имеем $P(Z < t) = 0$. Для любого $t > 0$ имеем

$$P(Z < t) = \iint\limits_{\substack{0 \le x \le 2 \\ 0 < y < \frac{1}{4} \\ xy < t}} \frac{dx\, dy}{2\sqrt{y}} = \int\limits_0^2 \sqrt{\min\left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{t}{x}\right\}} \, dx.$$

Если $t \ge \frac{1}{2}$, то при всех $0 < x \le 2$ имеем $\frac{t}{x} \ge \frac{t}{2} \ge \frac{1}{4}$, следовательно

$$P(Z < t) = \int\limits_0^2 \frac{dx}{2} = 1 \qquad \forall\, t \ge \frac{1}{2}.$$

Если же $0 < t < \frac{1}{2}$, то получаем

$$P(Z < t) = \int\limits_0^{4t} \frac{dx}{2} + \int\limits_{4t}^2 \sqrt{\tfrac{t}{x}} \, dx = 2t + 2\sqrt{2t} - 4t = 2\sqrt{2t} - 2t.$$

Следовательно, плотность распределения случайной величины Z равна

$$\rho_Z(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ \sqrt{\frac{2}{t}} - 2, & t \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины Z равно

$$M(Z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,\rho_Z(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2t} - 2t\right)\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{3/2} - t^2 \Bigg|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Инструкция: Найдена плотность распределения Z — одно очко. Найдено математическое ожидание Z — одно очко.