

Специальные асимптотики функций Вебера – Эрмита и их применение в задачах распространения радиоволн.



МФТИ

Московский физико-технический институт

Палкин Е. А.

Российский новый университет,

Петрович А.А.

Модельная задача отражения плоской волны от параболического слоя

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 (1 - \alpha(a^2 - x^2)) \psi(x) = 0$$

$$x \in [-a, +a]$$

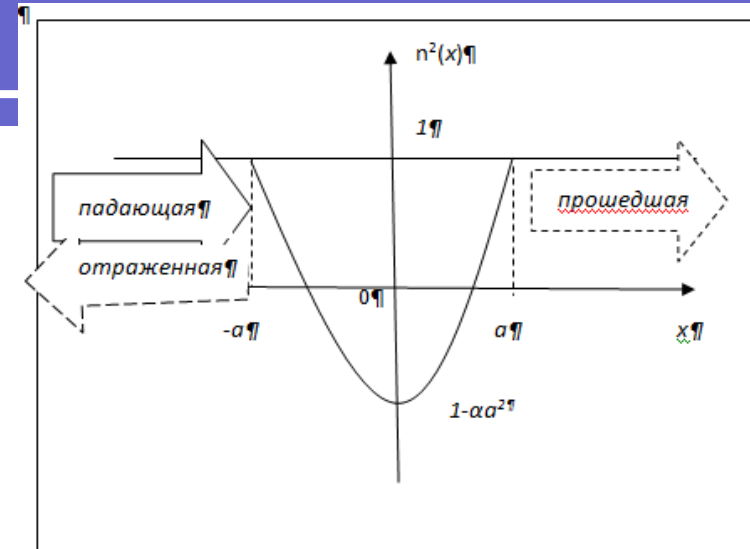
k – волновое число,

α – параметр (масштаб) параболического слоя,

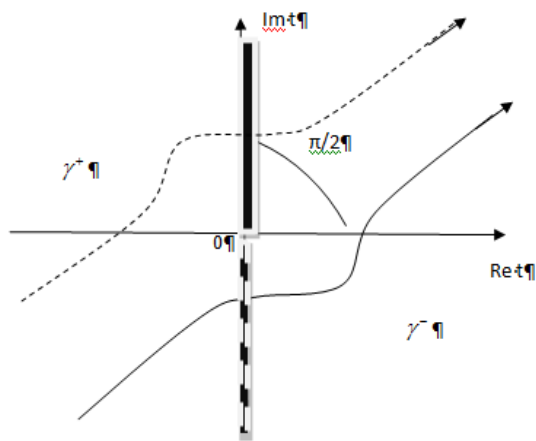
$$\psi(x) = C * \exp\left(\frac{i}{2} k x^2 \sqrt{\alpha}\right) * \int_{\gamma} \exp\left\{ik \left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha}} p^2 + px\right)\right\} * p^{k \frac{(1-\alpha a^2)}{2i\sqrt{\alpha}}} * p^{-1/2} dp$$

$$D_{\nu, \Lambda}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{i\Lambda(t^2 + tX + \nu \ln t)\} * t^{-1/2} dt$$

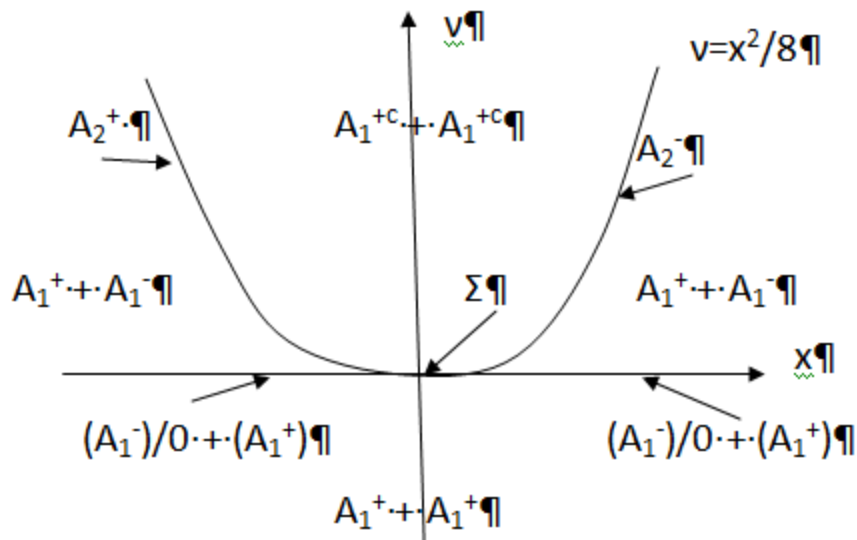
$$X = 2\alpha^{1/4} x; \quad \nu = -\left(\frac{1 - \alpha a^2}{2\sqrt{\alpha}}\right), \quad \Lambda = k \gg 1.$$



Области различных особенностей в пространстве переменных функции Вебера.



Выбор разрезов и контура интегрирования



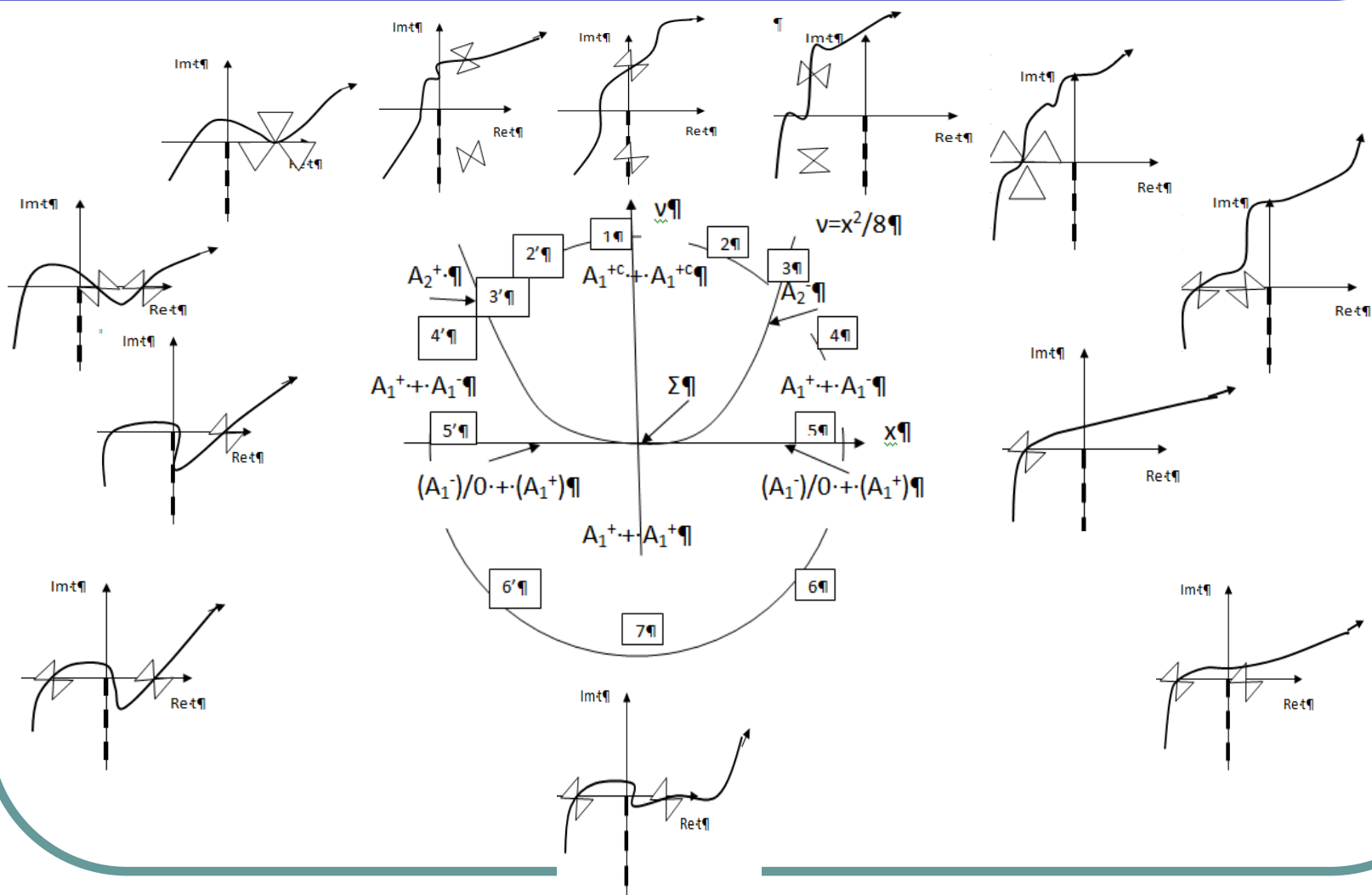
Σ – центральная особенность

A_2 – каспидная особенность (складка)

A_1^+ и A_1^- - морсовские критические точки

$(A_1^+)/0$ – особенность «взаимодействия» морсовской токи и точки «0».

Трансформация перевального контура интегрирования в пространстве переменных функции Вебера

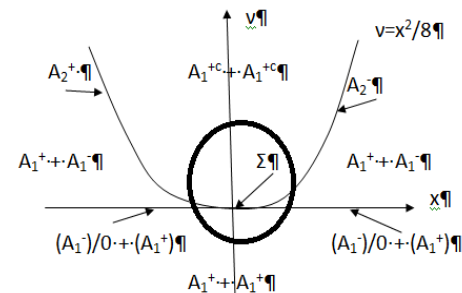


Равномерные асимптотические разложения модельного решения-I

I. Модельное решение, особенность Σ .

$$\psi(x) = C\sqrt{2\alpha}^{1/8}k^{-1/4} \exp\left\{i\left[\frac{\alpha a^2 - 1}{2\sqrt{2}} \ln\left(2\alpha^{1/4}\right)\right] - i\frac{\nu}{2} \ln k\right\} * \exp\left\{\frac{i}{2}kx^2\sqrt{\alpha}\right\} * D_{\nu}^{\pm}(X)$$

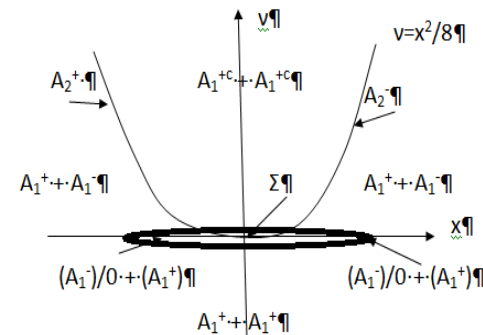
$$D_{\nu}^{\pm}(X) = \int_{\gamma^{\pm}} \exp\{i(t^2 + Xt + \nu \ln t)\} t^{-1/2} dt; \quad X = 2\alpha^{1/4}k^{1/2}x$$



II. Частный случай (точное представление), $\nu = 0$, особенность $(A_1^- / 0) + A_1^+$.

$$\psi(x) = C_{\pm} \sqrt{2\alpha}^{1/8}k^{-1/4} \exp\left\{i\left[\frac{\alpha a^2 - 1}{2\sqrt{2}} \ln\left(2\alpha^{1/4}\right)\right]\right\} * \exp\left\{\frac{i}{2}kx^2\sqrt{\alpha}\right\} * \{I(0, \lambda_2) \mp iI(0, -\lambda_2)\}$$

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(t^4 + \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t)\} dt - \text{интеграл Г.Пурси}; \quad \lambda_2 = 2\alpha^{1/4}k^{1/2}x$$



Равномерные асимптотические разложения модельного решения-II

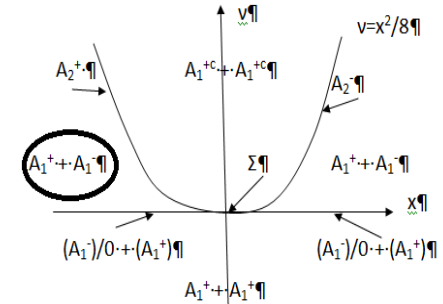
III. Асимптотика при $x < 0, \nu > 0$ ($A_1^+ + A_1^-$), для контура γ^+ .

$$\psi(x) \approx \psi(x)_{nao} + \psi(x)_{omp}$$

$$\psi(x)_{nao} = C_+ \sqrt{\pi} 2e^{i\pi/4} k^{-1/2} |x|^{-1/2} \frac{(1 + \sqrt{1-\rho} - 2\rho)^{1/2}}{(1 + \sqrt{1-\rho} - \rho)^{1/2} (1 + \sqrt{1-\rho})^{1/2}} * \\ * \exp\left\{ ik \left[-\frac{x^2 \alpha^{1/2}}{2} \sqrt{1-\rho} + \nu \left[\ln \left[|x| \alpha^{1/2} (1 + \sqrt{1-\rho}) \right] - \frac{1}{2} \right] \right] \right\}$$

$$\rho = \frac{\alpha a^2 - 1}{\alpha x^2} = \frac{x_0^2}{x^2}$$

$$\psi(x)_{omp} = C_+ \sqrt{\pi} 2e^{-i\pi/4} k^{-1/2} |x|^{-1/2} \frac{(1 + \sqrt{1-\rho} - 2\rho)^{1/2}}{(1 + \sqrt{1-\rho} - \rho)^{1/2} (1 + \sqrt{1-\rho})^{1/2}} * \\ * \exp\left\{ ik \left[\frac{x^2 \alpha^{1/2}}{2} \sqrt{1-\rho} + \nu \left[\ln \left[|x| \alpha^{1/2} (1 - \sqrt{1-\rho}) \right] - \frac{1}{2} \right] \right] \right\}$$

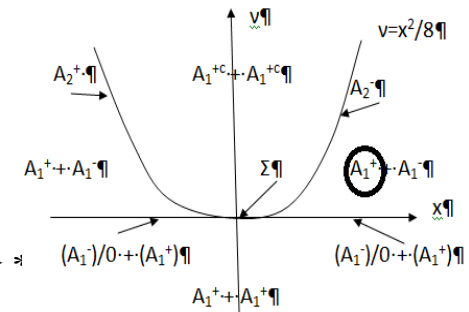


IV. Асимптотика при $x > 0, \nu > 0$ (A_1^+), для контура γ^+ .

$$\psi(x) \approx \psi(x)_{просач}$$

$$\psi(x)_{просач} = C_+ \sqrt{\pi} 2e^{-i\pi/4} k^{-1/2} |x|^{-1/2} \frac{(1 + \sqrt{1-\rho} - 2\rho)^{1/2}}{(1 + \sqrt{1-\rho} - \rho)^{1/2} (1 + \sqrt{1-\rho})^{1/2}} * \\ * \exp\left\{ \frac{i}{2} k \left[-\frac{x^2 \alpha^{1/2}}{2} \sqrt{1-\rho} + \nu \left[\ln \left[|x| \alpha^{1/2} (1 + \sqrt{1-\rho}) \right] - \frac{1}{2} \right] \right] \right\} *$$

$$* \exp\left\{ -k\pi \frac{\alpha a^2 - 1}{2\sqrt{\alpha}} \right\}$$



Равномерные асимптотические разложения модельного решения - III

V. Асимптотика при $x < 0, \nu > 0$ (A_2^+), для контура γ^+ .

$$D_{\nu, \Lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A_2}) * \{l_{1A_2} A^\pm i(\tilde{X}) + l_{2A_2} A^\pm i'(\tilde{X})\} + [\exp(i\Theta_P) \{l_P\}]$$

$$A i^\pm(X) = \int_{L^\pm} \exp\{i(\pm t^3 + tX)\} dt - \text{функция Эйри (Эйри - Фока)}$$

$$A^\pm i'(X) = i \int_{L^\pm} \exp\{i(\pm t^3 + tX)\} t dt$$

VI. Асимптотика при $x > 0, \nu > 0$ (A_2^-), для контура γ^+ .

$$D_{\nu, \Lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A_2}) * \{l_{1A_2} W_2(\tilde{X}) + l_{2A_2} W_2'(\tilde{X})\}$$

$$W_2(X) = \int_{L_2} \exp\{i(t^3 + tX)\} dt - \text{вторая функция Эйри}$$

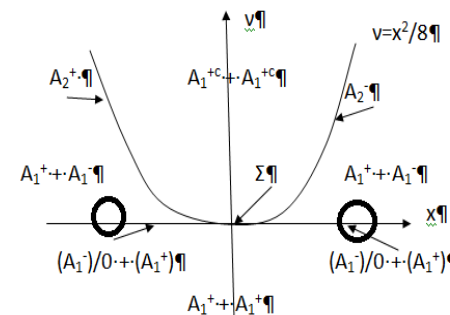
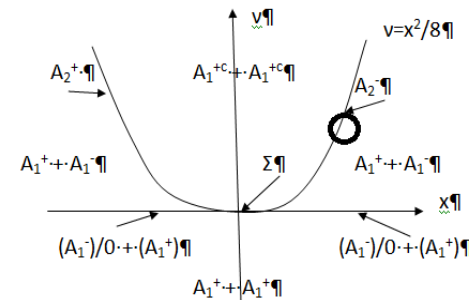
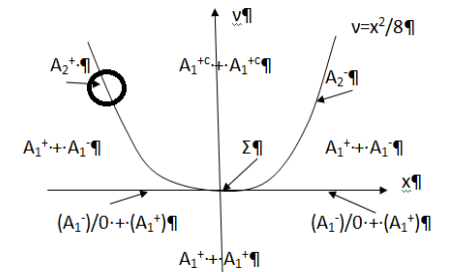
$$W_{1,2}'(X) = i \int_{L_{1,2}} \exp\{i(t^3 + tX)\} t dt$$

VII. Асимптотика при $x \neq 0, \nu \approx 0$ ($A_1^- / 0$) + A_1^+ , для контура γ^+ .

$$D_{\nu, \Lambda}(X) \cong \exp(i\Theta_{A_1/0}) * \{l_{1A_1/0} B^\pm(\tilde{X}) + l_{2A_1/0} B^{\pm'}(\tilde{X})\} + \exp(i\Theta_{A_1}) \{l_{A_1}\}$$

$$B^\pm(X) = \int_{L^\pm} \exp\{i(\pm t + X \ln t)\} * t^{-1/2} dt - \text{интеграл Бёмера - Френеля}$$

$$B^{\pm'}(X) = i \int_{L^\pm} \exp\{i(\pm t + X \ln t)\} * \ln t * t^{-1/2} dt$$



Спасибо за внимание .

