О параболической системе с нелинейностью Навье–Стокса

М. Е. Боговский

ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Московский физико-технический институт
(Гос. университет)

Москва

18 августа 2017

Задача Коши для системы Навье–Стокса

$Q_T \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \times (0, T),\ \ \mathrm{T}{>}0,\ \ n \geqslant 2$

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}\colon\ Q_T \to \mathbb{R}^n,\ \psi\colon\ Q_T \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f}(x,t), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{v}\big|_{t=0} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

Задача Коши для системы Навье–Стокса

$Q_T \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \times (0, T), \; \mathrm{T}{>}0, \; n \geqslant 2$
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}\colon Q_T \to \mathbb{R}^n, \; \psi\colon Q_T \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f}(x,t), \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \; (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{v}\big|_{t=0} = 0, \; x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{J}_p(Q_T) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T)\colon \int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{u}, \nabla_x\varphi)\, dxdt = 0 \;\forall\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

$$\boldsymbol{J}^\infty(Q_T) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{u} \in \mathring{\boldsymbol{C}}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\colon \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0, \; \boldsymbol{u}\big|_{t=T} = 0\}$$

Слабое решение $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{J}_p(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u}\right) dxdt + \int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})\, dxdt = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{J}^{\infty}(Q_T)$$

Слабое решение $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{J}_p(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{u} + \mu \Delta \boldsymbol{u}\right) dxdt + \int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})\, dxdt = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{J}^{\infty}(Q_T)$$

Слабое решение $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{J}_p(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{u} + \mu \Delta \boldsymbol{u}) \, dxdt + \int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) \, dxdt = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{J}^{\infty}(Q_T)$$

Класс Проди–Серрина:

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T), \quad p \geqslant n + 2, \quad n \geqslant 2$$

Слабое решение $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{J}_p(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \big(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u}\big)\, dxdt + \int\limits_{Q_T} (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})\, dxdt = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{J}^{\infty}(Q_T)$$

Класс Проди–Серрина:

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T), \quad p \geqslant n+2, \quad n \geqslant 2$$

Принадлежность к классу Проди–Серрина гарантирует единственность слабого решения и обеспечивает повышение его гладкости до гладкости сильного решения, т. е.

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_t\,, D_x^{\alpha}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T),\ |\alpha| = 2$$

Нелинейность Навье–Стокса

- Каноническая нелинейность

$$\boldsymbol{v}_t + \boxed{(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v}} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

Нелинейность Навье–Стокса

- Каноническая нелинейность

$$\mathbf{v}_t + \boxed{(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}} - \mu\Delta\mathbf{v} + \nabla\psi = \mathbf{f} \tag{1}$$

- Эквивалентная нелинейность

$$\mathbf{v}_t + \boxed{(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} - \nabla|\mathbf{v}|^2/2} - \mu\Delta\mathbf{v} + \nabla\widetilde{\psi} = \mathbf{f} \tag{2}$$

$$\widetilde{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi + |\mathbf{v}|^2/2$$

Нелинейность Навье–Стокса

- Каноническая нелинейность

$$\boldsymbol{v}_t + \boxed{(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v}} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

- Эквивалентная нелинейность

$$\boldsymbol{v}_t + \boxed{(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} - \nabla|\boldsymbol{v}|^2/2} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\widetilde{\psi} = \boldsymbol{f} \tag{2}$$

$$\widetilde{\psi} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi + |\boldsymbol{v}|^2/2$$

Нелинейность Навье–Стокса

- Каноническая нелинейность

$$\boldsymbol{v}_t + \boxed{(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

- Эквивалентная нелинейность

$$\boldsymbol{v}_t + \boxed{(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nabla|\boldsymbol{v}|^2/2} - \mu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\widetilde{\psi} = \boldsymbol{f} \tag{2}$$

$$\widetilde{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi + |\boldsymbol{v}|^2/2$$

Слабые решения $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{J}_p(Q_T)$ задач Коши для (1) и (2) класса Серина–Проди совпадают. Совпадают также и графики обратных отображений $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{v}$, соответствующих (1) и (2).

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Класс Проди–Серрина:

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T), \quad p \geqslant n+2, \quad n \geqslant 2$$

Параболическая система с нелинейностью Навье–Стокса

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2 - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

для параболической системы с нелинейностью Навье–Стокса.

Класс Проди–Серрина:

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T), \quad p \geqslant n+2, \quad n \geqslant 2$$

Принадлежность к классу Проди–Серрина гарантирует единственность слабого решения и обеспечивает повышение его гладкости до гладкости сильного решения, т. е.

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T) \ \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_t \,, D_x^\alpha \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_p(Q_T), \ |\alpha| = 2$$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n\ \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2,\ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Априорная ограниченность сильных решений

Достаточно установить априорную ограниченность сильного решения в норме $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $p \geqslant n+2, \ n \geqslant 2$.

Свойство поточечной ортогональности:

$$\boldsymbol{u} \perp (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla|\boldsymbol{u}|^2/2$$

в смысле скалярного произведения в $\mathbb{R}^n \ \forall\, n \geqslant 2$

Заметим, что

$$-\int\limits_{Q_\tau} (\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})|\boldsymbol{u}|^{p-2} dxdt = \int\limits_{Q_\tau} [\nabla \boldsymbol{u}]^2 |\boldsymbol{u}|^{p-2} dxdt + \\ + \frac{p-2}{4} \int\limits_{Q_\tau} \left|\nabla |\boldsymbol{u}|^2\right|^2 |\boldsymbol{u}|^{p-4} dxdt \ \ \forall\, \tau \in (0, T), \qquad (4)$$

Априорная ограниченность нормы в $\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)$

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int\limits_0^T \|\boldsymbol{f}(\cdot,s)\|_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} ds \quad \forall\, t \in (0,T) \;\; \forall\, p \geqslant 2$$

Отметим, что вывод (4) опирается на следующую теорему

Теорема

Пусть $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ липшицева и $w \in W_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$. Если $F \circ w \in L_p(\Omega)$, то $F \circ w \in W_p^1(\Omega)$ и

$$\nabla(F \circ w)(x) = F'[w(x)] \cdot \nabla w(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$.

— см. Теорему 2.1.11 на с. 48 в W.P. Ziemer *Weakly differentiable functions*, Springer, 1989.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Terence Tao *Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-stokes equation*, Journal of the AMS, 2016, Vol. 29, no. 3, p. 601–674.
[2] Stephen Montgomery-Smith, Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation, Proc. Amer. Math. Soc. 2001, Vol. 129, no. 10, p. 3025–3029.