МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Сборник задач

для упражнений по курсу:

Основы вычислительной математики

Москва 2014

УДК 519.5:517.949.8

Сборник задач для упражнений по курсу: Основы вычислительной математики. -

Составители: В.И.Косарев, О.Л.Косарева, Н.П.Онуфриева, В.Б.Пирогов, В.С.Рябенький, Л.И.Северинов, Л.М.Стрыгина, Р.П.Федоренко, А.С.Холодов, Л.А.Чудов.

Издание содержит ряд исправлений. Задачи, помеченные † отличаются от задач в издании 1996 года.

I. Погрешности

I.1. Величина y вычисляется по формуле $y = f(x)$, а величина x получается прямым измерением, которое осуществляется с погрешностью, не превосходящей некоторое заданное число Δx.

Требуется указать наименьшее число Δy, при котором для данного x^*, полученного в результате приближенного измерения величины x, справедлива оценка

$$|y^* - y| < \Delta y, \quad y^* = f(x^*), \quad y = f(x).$$

Указать факторы, от которых зависит точность приближенной формулы $\Delta y = f'(x^*)\Delta x$ для Δy.

а) $f(x) = \sin x$, б) $f(x) = \ln x$, в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

I.2. Пусть $z = f(x, y)$, причем величина x^* получается в результате приближенных измерений с неустранимой погрешностью $\Delta x = 10^{-3}$. Пусть при вычислении z нас интересует абсолютная погрешность.

С какой разумной точностью следует измерять y?

а) $f(x, y) = x + 10y$ б) $f(x, y) = xy + xy^2$ в) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

I.3. Пусть требуется вычислить производную $f'(x)$ заданной функции $f(x)$ в некоторой точке x. Пусть известно, что $|f''(x)| \le 1$ и $|f'''(x)| \le 1$ при всех x.

Используются приближенные формулы

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Указать в обоих случаях h, при которых погрешность полученного значения $f'(x)$ не превосходит 10^{-3}.

I.4. Пусть требуется вычислить производную функции $f(x)$, причем известно, что $f''(x) \le 1$ при всех x. Используется приближенная формула

$$f'(x) = \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h},$$

где $f^*(x)$ — приближенные значения функции $f(x)$, полученные в результате неточных измерений с погрешностью, не превосходящей 10^{-4}.

Какова наибольшая точность, с которой можно вычислить $f'(x)$ по указанной формуле? Указать оптимальный выбор шага h.

I.5. Пусть неустранимая погрешность при измерении x не превосходит $\Delta x = 10^{-3}$. Для вычисления заданной функции $y = f(x)$ используется частичная сумма ряда Маклорена

$$y \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n \qquad (*)$$

а) Как выбрать n, чтобы погрешность приближения функции $f(x)$ отрезком ряда Маклорена не превосходила неустранимую погрешность Δy определения y? Рассмотреть функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и на отрезке $10 \leq x \leq 11$.

б) Каковы требования к относительным погрешностям округления слагаемых $\frac{f^{(k)}}{k!}x^k$, чтобы абсолютная погрешность при их вычислении не превосходила неустранимую погрешность Δy? Рассмотреть функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и на отрезке $10 \leq x \leq 11$.

Не можете ли Вы предложить для вычисления $\sin x$ на отрезке $10 \leq x \leq 11$ более совершенную процедуру, чем задаваемую формулой $(*)$?

II. Обусловленность и вычисление решения линейных систем

II.1. Для системы

$$\begin{cases} 10^{-3}x_1 + x_2 = b_1 \\ \qquad x_1 - x_2 = b_2 \end{cases}$$

ответить на следующие вопросы:

а) Каково число обусловленности $\mu = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ системы, где A — матрица этой системы, а в качестве нормы произвольного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2)$ используется первая норма, то есть $\|\vec{x}\| = \max(|x_1|, |x_2|)$?

б) Какова допустимая относительная погрешность при задании $\vec{b} = (b_1, b_2)$, при которой относительная погрешность решения не превосходит 10^{-2}?

в) Пусть $b_1 = 2, b_2 = 1$. С каким числом знаков надо вести вычисления по методу Гаусса без выбора главного элемента, чтобы относительная погрешность найденных x_1 и x_2 не превосходила 10%? Тот же вопрос для метода Гаусса с выбором главного элемента.

II.2. Дана система

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 & & & & = & 1 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 & & & & = & 2 \\ \quad x_2 + 10x_3 + x_4 & & & & = & 3 \\ \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots & & & & & \\ \qquad x_{98} + 10x_{99} + x_{100} & & & & = & 99 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{99} + x_{100} & & & & = & P \end{cases}$$

где P — некоторый параметр.

а) Описать алгоритм метода Гаусса без выбора главного элемента для решения системы при $P = 100$.

б) Описать алгоритм, позволяющий экономно вычислять совокупность решений, отвечающих многим различным значениям параметра.

II.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = b_1 \\ 0.99x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

а) Пусть вектор $\vec{b} = (b_1, b_2)$ получает некоторое возмущение $\delta\vec{b} = (\delta b_1, \delta b_2)$. Тогда решение $\vec{x} = (x_1, x_2)$ получит соответствующее возмущение $\delta\vec{x} = (\delta x_1, \delta x_2)$.

Найти наименьшее число μ, при котором независимо от $\vec{b}$ и $\delta\vec{b}$ выполняется оценка

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \mu\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Дать ответ, используя нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$, введеные формулами

$$\begin{aligned}
&\|\vec{x}\|_1 = \max\big(|x_1|, |x_2|\big)\\
&\|\vec{x}\|_2 = |x_1| + |x_2|\\
&\|\vec{x}\|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}
\end{aligned}$$

и найти соответствующие значения $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ и $\mu = \mu_3$.

б) При заданном фиксированном $\vec{b}$ найти наименьшее число $\nu = \nu(\vec{b})$, при котором независимо от $\delta\vec{b}$ выполнена оценка

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \nu(\vec{b})\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Найти то $\vec{b}$, которому соответствует наименьшее значение $\nu(\vec{b})$, а также это наименьшее значение ν в случае использования первой, второй и третьей нормы.

II.4. Рассмотреть систему

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 &=& b_1\\
-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &=& b_2
\end{array}\right.$$

и ответить для нее на вопросы предыдущей задачи.

II.5. Для системы

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 &=& b_1\\
x_1 - x_2 &=& b_2
\end{array}\right.$$

ответить на вопросы задачи **II.3**.

II.6. Для численного решения краевой задачи вида

$$\begin{aligned}
&y''(x) - P^2(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1\\
&y(0) = \varphi\\
&y(1) = \psi
\end{aligned} \tag{1}$$

где $P(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, а φ и ψ — заданные числа, можно поступить так: зададим натуральное N и отметим на отрезке $[0, 1]$ точки $x_k =$

$k \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{1}{N}$. Искомую функцию $y(x)$ заменим сеточной функцией $y^{(h)} = (y_0, y_1, \ldots, y_N)$, определенной в точках $x_k, k = 0, 1, \ldots, N$.

Для вычисления $y_0, y_1, \ldots, y_N$ составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi \\ \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - P^2(x_k)y_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ y_N = \psi \end{cases} \tag{2}$$

а) Показать, что система (2) есть частный случай системы вида

$$\begin{cases} b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0 \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \\ a_N y_{N-1} + b_N y_N = f_N \end{cases} \tag{3}$$

б) Выписать матрицу системы (2).

в) Выписать формулы алгоритма решения системы (3) методом Гаусса без выбора главного элемента (методом прогонки).

г) Показать, что в случае $|b_k| > |a_k| + |c_k|$ в формулах метода прогонки не встретится деление на нуль.

д) Написать программу для вычисления решения системы (3) методом прогонки и вычислить решение в случае

$$P(x) = 1 + x^2, \quad f(x) = xe^x, \qquad \varphi = 1, \quad \psi = 3, \quad N = 20.$$

II.7. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &y''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ &y(0) = y(1) = 0. \end{aligned}$$

Для ее численного решения введем на интервале $(0, 1)$ сетку $x_k = k \cdot h, \ h = \frac{1}{N}, \ k = 1, 2, \ldots, N-1$ и заменим искомую функцию $y(x)$ сеточной $y^{(h)} = (y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})$.

Для определения чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ будем пользоваться системой

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = f(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1}$$

положив $y_0 = y_N = 0$.

а) Проверить, что сеточные функции

$$\psi^{(m)} = \left(\psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}, \ldots, \psi_{N-1}^{(m)}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\psi_k^{(m)} = \sin \frac{km\pi}{N}$$

являются собственными векторами матрицы A системы (1) и что соответствующие собственные числа суть

$$\lambda_m = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2N}, \qquad m = 1, 2, \ldots, N-1.$$

б) Найти наименьшее число $\mu(A)$, при котором независимо от $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$ справедлива оценка

$$\frac{\|\delta y^{(h)}\|_3}{\|y^{(h)}\|_3} \Big/ \frac{\|\delta f^{(h)}\|_3}{\|f^{(h)}\|_3} \leq \mu(A).? \tag{2}$$

Здесь через $\delta f^{(h)} = \left(\delta f_1^{(h)}, \delta f_2^{(h)}, \ldots, \delta f_{N-1}^{(h)}\right)$ обозначено возмущение, которое придается правой части системы (1), а через $\delta y^{(h)}$ — соответствующее возмущение решения. Как ведет себя $\mu(A)$ при возрастании N?

в) При каких $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$ достигается равенство в оценке (2)? При каких $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$ левая часть неравенства принимает наименьшее значение и чему это наименьшее значение равно?

г) На основе исследования модельной задачи (1) сделайте (благоприятные) выводы о свойствах линейной алгебраической системы, рассмотренной в задаче **II.6**.

II.8. Дана система

$$\begin{aligned} &10x + y - z = 1 \\ &x - 20y + 3z = 2 \\ &2x + 3y - 10z = -1. \end{aligned}$$

Выписать формулы для вычисления решения итерациями, используя свойство диагонального преобладания. Сколько итераций достаточно сделать, чтобы уменьшить погрешность исходного приближения в тысячу раз?

II.9. Пусть вещественная матрица A системы линейных уравнений порядка m

$$A\vec{x} = \vec{f}, \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

симметрична, и ее наименьшее и наибольшее собственные числа $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ положительны. Введем норму $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2}$.

а) Подобрать параметр τ так, чтобы в методе последовательных приближений
$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \tau \left(A\vec{x}^{(n)} - \vec{f} \right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
норма погрешности $\vec{\varepsilon}^{(n)} = \vec{x}^{(n)} - \vec{x}^{*}$ убывала как можно быстрее. Здесь $x^{(0)}$ — заданное начальное приближение, $\vec{x}^{*}$ — вектор-решение системы.

б) Подобрать пару итерационных параметров τ_1, τ_2 так, чтобы в методе последовательных приближений
$$\begin{aligned} \vec{z}^{(n)} &= x^{(n)} - \tau_1 \left(A\vec{x}^{(n)} - \vec{f} \right) \\ \vec{x}^{(n+1)} &= z^{(n)} - \tau_2 \left(A\vec{z}^{(n)} - \vec{f} \right) \end{aligned}$$
норма погрешности $\vec{\varepsilon}^{(n)}$ убывала как можно быстрее.

в) Пусть $\lambda_{\min} = 1, \lambda_{\max} = 10$. Во сколько раз больше арифметических операций потребуется для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз при использовании первого итерационного алгоритма по сравнению со вторым?

III. Метод наименьших квадратов для решения переопределенных линейных систем

III.1. Найти обобщенное в смысле наименьших квадратов решение переопределенной системы уравнений

$$\begin{aligned} x + y &= 3.0 \\ 2x - y &= 0.2 \\ x + 3y &= 7.0 \\ 3x + y &= 5.0 \end{aligned}$$

III.2†. Напряженность магнитного поля H и магнитная индукция B связаны соотношением $B = \frac{H}{a+bH}$. По результатам следующих экспериментальных измерений определить a и b:

H	8	10	15	20	30	40	60	80
B	13.0	14.0	15.4	16.3	17.2	17.8	18.5	18.8

III.3. Измерения трех углов плоского треугольника привели к значениям: $A_1 = 54°5'$, $A_2 = 50°1'$, $A_3 = 76°6'$. Сумма углов $A_1 + A_2 + A_3 = 180°12'$ дает невязку в $12'$, превосходящую погрешность наблюдения. Ликвидировать невязку, следуя предписанию метода наименьших квадратов.

III.4. Сопротивление проволоки R линейно зависит от температуры t: $R = a_0 + a_1 t$. По результатам следующих экспериментальных измерений определить a_0 и a_1:

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

III.5. Выполнить линейную аппроксимацию по методу наименьших квадратов для таких исходных данных, найденных экспериментально:

x	0.2	0.3	0.7	0.8	1.2	1.4	1.8
y	2.229	2.180	1.972	1.887	1.696	1.590	1.332

Определить y для $x = 0.578$, $x = 0.882$, $x = 1.356$.

III.6. Выполнить квадратичную аппроксимацию по методу наименьших квадратов для таких экспериментальных данных:

x	1.0	2.0	2.5	3.0	4.0	4.5	5.0	6.0
y	1.88	0.96	−0.13	−2.08	−6.72	−10.67	−14.13	−22.80

III.7. Выполнить квадратичную аппроксимацию по методу наименьших квадратов для таких экспериментальных данных:

x	0.0	0.5	1.0	2.0	2.2	2.6	3.0
y	2.364	2.307	2.915	5.457	6.300	8.893	10.062

Определить y для $x = 0.87,\ 2.54,\ 2.17,\ 2.91$.

III.8. Построить квадратичную функцию $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ по приведенным ниже экспериментальным данным, а затем вычислить ее значения в точках $x = 0,\ x = 0.378,\ x = 0.521,\ x = -0.435$

x	-0.5	-0.3	-0.1	0.2	0.6	0.8	1.0
y	3.241	2.563	2.138	1.914	2.514	3.149	3.985

III.9. Периодическая с периодом 2π функция $y = f(x)$ задана в узлах $x_k = \frac{2\pi k}{N},\ k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad y_k = f(x_k)$.

Построить тригонометрический многочлен

$$P_m(x) = c_{-m}e^{-imx} + c_{-m+1}e^{-i(m-1)x} + \cdots + c_m e^{imx},$$

приближающий функцию $y = f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов в случае $N = 5,\ m = 0, 1, 2$.

III.10. Функцию $y = \sqrt{1 + \sin^2(x-1)}$ решено приближенно заменить тригонометрическим многочленом

$$P_2 = a + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x,$$

который наименее в смысле наименьших квадратов отклоняется от таблицы значений этой функции, вычисленной в некоторых десяти точках $x_0, x_1, \ldots, x_9$.

а) Опишите алгоритм для вычисления коэффициентов a, a_1, a_2, b_1, b_2.

б) Какие (существенные!) упрощения можно сделать в случае, когда $x_k = \frac{2\pi k}{10}, \quad k = 0, 1, \ldots, 9$.

III.11. Пусть замеры функции $y = f(x)$ осуществлены в точках $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k = 0, 1, \ldots, n$, являющихся нулями многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$ и записаны в виде таблицы

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

Среди многочленов степени не выше заданного $k, 0 \le k \le n$ указать тот многочлен $P_k(x)$, который наилучшим (в смысле метода наименьших квадратов) образом приближает заданную функцию.

Указание. Искать $P_k(x)$ в форме $P_k(x) = \sum_{m=0}^{k} c_m T_m(x)$ и воспользоваться тем, что многочлены Чебышева $T_k(x), k = 0, 1, \ldots, n$ образуют ортогональную систему функций, определенных в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\langle T_p(x), T_m(x) \rangle \equiv \sum_{k=0}^{n} T_p(x_k) T_m(x_k) = \begin{cases} 0, & p \neq m \\ n+1, & p = m = 0 \\ \frac{n+1}{2} & p = m \neq 0 \end{cases}$$

для $0 \leq p, m \leq n$.

а) Осуществить вычисления в случае $n = 3$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	2	1	3	0

для $k = 0, 1, 2, 3$.

б) Составить программу для вычисления значения искомого многочлена $P_k(x)$ в точке $x = x^* \in [-1, 1]$ при произвольных n, k и произвольном наборе чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

IV. Нелинейные скалярные уравнения и системы

IV.1. Показать, что положительное решение уравнения $\cos x = 2x$ можно приближенно вычислить, пользуясь итерационной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n,$$

где $x_0 \geq 0$ — произвольно. Положим $x_0 = 0$. Найти такое n, при котором погрешность приближения x_n не превосходит 10^{-6}.

IV.2. Требуется найти оба корня уравнения $x = \ln(x+2)$

а) Показать, что для отыскания положительного корня можно воспользоваться итерационным процессом $x_{n+1} = \ln(x_n + 2), x_0 \geq 0$ — произвольно.

б) Можно ли указать x_0, не совпадающее с отрицательным корнем заданного уравнения таким образом, чтобы итерационный процесс $x_{n+1} = \ln(x_n+2)$ сходился к отрицательному корню?

в) Указать способ вычисления отрицательного корня.

IV.3. Выписать формулы подходящего метода последовательных приближений для нахождения положительного корня уравнения

$$x - x^3 + 0.1 = 0.$$

Выбрав начальное приближение, оценить необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-10}$.

IV.4. Найти все действительные решения уравнения

$$0.001x^5 + x^2 - 1 = 0$$

с точностью: а) до 0.1 б) до 10^{-6}

Указание. Грубое приближение найти, используя метод деления отрезка пополам. Более точное — с помощью метода Ньютона.

IV.5. Будем решать уравнение $F(x) \equiv f(x) - g(x) = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, методом Ньютона. Выберем некоторое x_0. Показать, что приближение x_1 имеет геометрический смысл абсциссы точки пересечения касательных к графикам $y = f(x)$ и $y = g(x)$, проведенным при $x = x_0$.

IV.6†. Занумеруем корни $x(n), n = 0, 1, \ldots$ уравнения $e^{-x} = \sin x$ в порядке возрастания. Показать, что итерации

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \qquad F(x) = e^{-x} - \sin x$$

сходятся к корню $x(n)$, если в качестве x_0 взять число πn.

Указание. Воспользоваться результатом задачи **IV.5**.

IV.7. Показать, что для решения методом Ньютона следующих уравнений в качестве x_0 можно принять любое $x_0 > 0$

а) $e^x = \dfrac{1}{x}$

б) $e^x + x^2 - 2 = 0$.

IV.8. Отделить корни следующих уравнений, а затем уточнить один из них с помощью подходящего итерационного процесса. Обосновать сходимость использованного процесса.

а) $2x^3 + 5x - 3 = 0$

б) $3x + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$

в) $(0.5)^x + 1 = (x-1)^2$

г) $(x-3)\cos x = 1, \quad -2\pi \le x \le 2\pi$

д) $\operatorname{arctg}(x-1) + 2x = 0$

е) $x^2 - 20\sin x = 0$

ж) $2\operatorname{tg} x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$

з) $2\lg - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$

и) $x^2 - \dfrac{1}{5}e^x = 0$

к) $\ln x + (x+1)^3 = 0$

л) $x2^x = 1$

м) $\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{x}$

IV.9*. Уравнение зависит от времени t, причем при $t = 0$ решения очевидны. Предложить итерационный алгоритм для отыскания положения этих корней в зависимости от t за время от $t = 0$ до $t = 1$.

а) $tx^3 + x^2 - 1 = 0$

Выяснить, при каком значении t эволюция отрицательного корня заканчивается его исчезновением.

б) $tx^4 + x^2 - 5x + 6 = 0$.

IV.10. Вычислить с точностью 10^{-3} координаты точек пересечения кривых

а) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ x + \cos(y-2) = 0.5 \end{cases}$

IV.11. Задана система уравнений, зависящая от времени t. Найти координаты точек пересечения при $t = 0$ и координаты точек пересечения, полученные при эволюции этих точек при изменении t от $t = 0$ до $t = 1$

а) $\begin{cases} x + y + 0.01tx^3y^2 = 1 \\ x - y - 10^{-3}t\cos(x^2y) = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y + 10^{-3}te^{xy} = 1 \\ 2x + y - 10^{-2}tx^2y^3 = -1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + 10^{-2}t\sin xy^2 = 5 \\ 5x + y + 10^{-2}tx^4y^2 = 2 \end{cases}$

IV.12. Составить алгоритм для отыскания с точностью 10^{-5} всех точек пересечения следующих линий

а) $\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 1.4)^2 - (y - 0.6)^2 = 1 \\ 4.2x^2 + 8.8y^2 = 1.42 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^2 - 3x^3 + 6y^3 + 8 = 0 \\ x^4 - 9y + 2 = 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin x - y = 1.32 \\ \cos y - x = -0.85 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^7 - 5x^2y^4 + 1510 = 0 \\ y^3 - 3x^4y - 105 = 0 \end{cases}$

IV.13. Использовав метод линеаризации (метод Ньютона) в окрестности нулевого приближения $y_0(x) \equiv 0$, найти первые приближения для решения следующих нелинейных краевых задач

а) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = e^y, \qquad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0, \qquad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

V. Интерполирование

А. Построение интерполяционного многочлена

V.1. Дана таблица значений $y(x)$. Построить интерполяционный многочлен степени не выше третьей, записав его в форме Лагранжа, в форме Ньютона и в форме $P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

а)

x	-3	-2	-1	0
y	16	7	4	1

б)

x	-1	-2	0	2
y	7	19	3	-5

V.2. Зависимость $y = f(x)$ задана таблицей

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

Вычислить $f(x)$, используя линейную, квадратичную и кубическую интерполяции по ближайшим точкам при следующих значениях x:
а) $x = 2.1$, б) $x = 2.9$, в) $x = 3.1$, г) $x = 3.8$, д) $x = 5.8$.

V.3*. Пусть в качестве узлов интерполяции приняты нули многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$, то есть точки $x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n$. По заданной таблице значений функции

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

записать интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в форме $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_kT_k(x)$ и выписать формулы для вычислений c_k.

а) Провести вычисления и привести многочлен $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_kT_k(x)$ к виду $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ в случае $n = 2$ для функции

x	x_0	x_1	x_2
y	2	1	3

б) Составить программу для вычисления $c_k, k = 0, 1, \ldots, n$ в общем случае.

Указание: многочлены Чебышева определены так:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Многочлены $T_k(x), k = 0, 1, \ldots, n$ образуют базис в пространстве сеточных функций, определенных в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — нулях многочлена $T_{n+1}(x)$, а также обладают следующим свойством ортогональности:

$$\langle T_p(x), T_m(x) \rangle \equiv \sum_{k=0}^{n} T_p(x_k) T_m(x_k) = \begin{cases} 0, & p \neq m \\ n+1, & p = m = 0 \\ \frac{n+1}{2} & p = m \neq 0 \end{cases}$$

для $0 \leq p, m \leq n$.

V.4*. Пусть в узлах $x_k = \frac{k}{n+1}, k = 0, 1, \ldots, n$ заданы значения периодической с периодом 1 функции $y = f(x)$.

а) Выписать формулы для коэффициентов тригонометрического интерполяционного многочлена $P_n(x) + iQ_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} c_m e^{2\pi i m x}$, принимающего заданные значения $y_k = f(x_k)$ в узлах сетки.

б) Записать $P_n(x)$ в форме

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x)$$

в) Пусть функция $f(x)$ обладает свойством нечетности относительно середины отрезка $[0, 1]$:

$$f(x) = -f(1-x).$$

Какие упрощения возникнут?

г) Составить программу на ЭВМ для тригонометрической интерполяции функций.

Указание: Воспользоваться следующим свойством ортогональности тригонометрического базиса:

$$\langle f(x), g(x) \rangle \equiv \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \overline{g(x_k)}$$

$$\langle e^{2\pi i m x}, e^{2\pi i p x} \rangle \equiv \sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i p x} = (n+1)\delta_{pm}$$

Б. Погрешность интерполяции

V.5. С каким шагом нужно составить таблицу значений функции $y = f(x)$, чтобы при использовании линейной интерполяции погрешность не превосходила 10^{-3}:

а) $f(x) = \sin x$, б) $f(x) = \ln x, \quad x > 1$, в) $f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1$.

V.6. С каким шагом нужно составить таблицу значений функции $y = f(x)$, чтобы при использовании квадратичной интерполяции погрешность не превосходила 10^{-3}:

а) $f(x) = \sin x$, б) $f(x) = \ln x, \quad x > 1$, в) $f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1$. Сравнить с результатом задачи **V.5**.

V.7. Составляется таблица значений функции $y = \sin x$ в неравноотстоящих точках $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad \max\limits_k (x_{k+1} - x_k) = h$.

а) При каком h линейная интерполяция позволяет восстановить $\sin x$ с точностью 10^{-4} между узлами?

б) Тот же вопрос для квадратичной интерполяции.

в) Какова в обоих случаях допустимая неточность в задании табличных значений, увеличивающая погрешность полученной интерполяции не более чем вдвое, то есть до $2 \cdot 10^{-4}$?

Ответить на последний вопрос при дополнительном предположении о постоянстве шага сетки $x_{k+1} - x_k = h = \mathrm{const}$ и без этого дополнительного предположения.

V.8†. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0.2050	0.2052	0.2060	0.2065	0.2069	0.2075
y	0.20792	0.20813	0.20896	0.20949	0.20990	0.21053

Значения $f(x)$ в таблице получены округлением и отклоняются от точных не более чем на $\Delta y = 5 \cdot 10^{-6}$.

а) Вычислить $f(0.2062)$, пользуясь линейной, квадратичной и кубической интерполяциями по ближайшим точкам. В какой форме — Лагранжа или Ньютона — удобнее записывать интерполяционные многочлены?

Составить представление о погрешностях, используя остаточный член интерполяции

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

и приближенное равенство

$$M_k \equiv \max_x \left| f^{(k)}(x) \right| \approx k! \max_{x_m} \left| f(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}) \right|,$$

где $f(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$ — разделенная разность порядка k.

б) Вычислить $f(0.2026)$, пользуясь линейной, квадратичной и кубической экстраполяцией по ближайшим точкам. Составить представление о погрешности.

в) Сделать вывод о применимости приближенных оценок для погрешности интерполяции сравнив результаты с точным значением для $f(x) = \operatorname{tg} x$.

V.9. При исследовании некоторой химической реакции через каждые 5 минут определялось количество вещества, оставшегося в системе. Результаты измерений указаны в таблице

t	7	12	17	22	27	32	37
ν	83.7	72.9	63.2	54.7	47.5	41.4	36.3

Определить количество вещества в системе по истечении 25 минут после начала реакции.

Указание. Составить таблицу разделенных разностей. Из этой таблицы видно, что уже третьи разделенные разности теряют регулярный характер. Поэтому воспользуемся квадратичной интерполяцией.

В. Обратная интерполяция

V.10. По заданным значениям функции

x	1	2	2.5	3
y	-6	-1	15.6	16

найти значение x при котором $y = 0$.

V.11. Используя таблицу значений функции $y = \operatorname{sh} x$

x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
y	4.457	5.466	6.695	8.198	10.019

найти то значение x, при котором $\operatorname{sh} x = 5$.

V.12. Используя значения функции $y = \lg x$, указанные в таблице

x	20	25	30
y	1.3010	1.3979	1.4771

найти то значение x, при котором $\lg x = 1.35$.

V.13. Вычислить положительный корень уравнения $z^7 + 28z^4 - 480 = 0$ посредством обратного интерполирования.

Указание. Составить таблицу значений $y = z^7 + 28z^4 - 480$ в точках $z = 1.90, 1.91, 1.92, 1.93$ и 1.94. Убедиться, что корень лежит между 1.92 и 1.93.

VI. Квадратурные формулы

VI.1. Вычислить собственный интеграл с точностью 10^{-4}:

а) $\displaystyle\int_0^1 \sin x^2 dx,$ б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx,$

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx,$ г) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2}dx.$

VI.2. Вычислить несобственный интеграл с точностью 10^{-4}:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$ б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx,$

в) $\displaystyle\int_0^{1.5} \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx,$ г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}dx,$

д) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\pi/2-x}}{\cos x}dx.$

VI.3†. Вычислить несобственный интеграл с точностью до 10^{-3}:

а) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$ б) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\sin x dx,$

в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}dx$ г) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$

е) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{\sin x}dx.$

VI.4. Вычислить интеграл от колеблющейся функции с точностью 10^{-6}:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin 100x}{1+x}dx,$ б) $\displaystyle\int_1^2 \cos 100x \ln x dx.$

VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения

VII.1. Проанализировать следующие несколько разностных схем для задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax, \quad 0 \le t \le T, \quad a = \mathrm{const}$$
$$x(0) = x_0$$

а) $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = ax_n$ б) $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = a\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$

в) $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau} = ax_n$ г) $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau} = a\dfrac{3x_n - x_{n-1}}{2}$

Вычислить порядок аппроксимации, найти точное решение и исследовать его на сходимость к решению дифференциальной задачи, указать дополнительные краевые условия в схемах в) и г) и выяснить их влияние на сходимость и требования к точности их задания.

VII.2. Выписать формулы метода Эйлера с пересчетом для следующих задач

а) $y'(x) = x + \cos y(x),\ y(1) = 30,\ 1 \le x \le 2$

б) $y'(x) = x^2 + y^2(x),\ y(2) = 1,\ 1 \le x \le 2$

Провести вычисления с шагом $h = \frac{1}{3}$.

VII.3. Выписать формулы для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях

а) $\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = v + w, \\ \dfrac{du}{dx} = v^2 - w^2, \qquad 0 \le x \le 1 \\ v(0) = 1, w(0) = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = vw, \\ \dfrac{du}{dx} = v + w, \qquad 1 \le x \le 2 \\ v(1) = 2, w(1) = 3 \end{cases}$

VII.4. Приближенно решить задачу Коши

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \sin x, \quad 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

а) Описать алгоритм, основанный на переходе к системе двух уравнений первого порядка с последующим решением этой системы.

б) Описать алгоритм, основанный на замене уравнения $y'' = y\sin x$ разностным уравнением второго порядка.

VII.5. Рассчитать траекторию $x(t), y(t)$, задаваемую следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} = x(y^2-1),\\
&\frac{d^2y}{dt^2} = y(x^2-1), \qquad 0 \le t \le 20\\
&x(0) = \alpha,\ y(0) = 1\\
&\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

VII.6. Составить таблицу с шагом $h = 0.25$ функции $\beta = \beta(\alpha)$, которая задана следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 1 - t^2, \quad 0 \le t \le T\\
&x(0) = \alpha,\ x'(0) = 0,\ -1 \le \alpha \le 0\\
&\beta(\alpha) = x(t,\alpha)\Big|_{t=1}
\end{aligned}$$

VII.7†. Построить численно общие решения для следующих дифференциальных уравнений:

а) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - (10+x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10$

б) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (10+x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$

Чем объяснить необходимость существенно различных алгоритмов для задач а) и б)?

VII.8. а) Составить разностную схему, аппроксимирующую краевую задачу

$$\frac{d}{dt}\left[P(t)\frac{dx}{dt}\right] + g(x)\frac{dx}{dt} + r(t)x = f(t), \quad 0 \le t \le T$$

с краевыми условиями периодичности

$$x(0) = x(T), \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=T}.$$

б) Привести разностное уравнение к стандартной форме

$$\begin{cases} a_n x_{N-1} + b_n x_n + c_n x_{n+1} = f_n, & n = 0 \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n + c_n x_{n+1} = f_n, & n = 1, 2, \ldots, N-2 \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n + c_n x_0 \quad = f_n, & n = N-1, \end{cases}$$

где $N = \frac{T}{\tau}$. Выписать матрицу системы. При условии $P(t) > 0$ найти достаточное условие на функции $r(t), q(t)$ и параметр τ для наличия у матрицы системы диагонального преобладания.

в) Вывести формулы периодической прогонки (по Абрамову), исходя из заданной формы прогоночного соотношения $x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n + \gamma_n x_{N-1}$.

г)*† Вычислить на ЭВМ решение в случае

$$P(t) = 1 + \sin^2 t,\ q(t) = \cos t,\ r(t) = -1,\ f(t) = \cos^2 t - 3\sin^3 t, \quad T = 2\pi$$

и сравнить его с точным $x(t) = \sin t$.

VII.9*. Найти наименьшее число λ, при котором следующая задача имеет нетривиальное решение

а) $\begin{cases} y'' + (\lambda - x^2) y = 0,\ x \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y'' + (\lambda - x) y = 0,\ x \in [0,1] \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \lambda t x = 0,\ x \in [0,1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$

VII.10*. При заданных значениях параметра α численно найти периодическое решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \alpha x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - y^3 \end{cases}$$

а) $\alpha = 0.1$ б) $\alpha = 1.0$ в) $\alpha = 10.0$

VII.11. а) Описать алгоритм вычисления решения на отрезке $0 \le x \le 1$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta y^3 + \gamma(y^2 + 2x) - y}{\alpha x^3 - 2\gamma x y + 3y^2 + x}, \qquad \alpha > 0,\ \beta < 0,\ \gamma > 0.$$

проходящего через точку $(0, 0)$.

б)* вычислить решение при $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 1$ на ЭВМ с точностью 10^{-3}.

VII.12. Для численного отыскания периодического с периодом единица решения уравнения

$$y'' - P^2(x)y = f(x),$$

где $P^2(x) > 0$ и $f(x)$ — заданные периодические функции, используется разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{N-1}}{h^2} - P^2(0)y_0 = f(0), \\ \dfrac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - P^2(nh)y_n = f(nh), \quad n = 1, 2, \ldots, N-2 \\ \dfrac{y_0 - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} - P^2(1-h)y_{N-1} = f(1-h), \end{cases}$$

где $Nh = 1$.

а) Предложить модификацию метода прогонки для вычисления решения разностной задачи

б)* Фактически вычислить решение при $h = 0.005$ в случае

$$P^2(x) = 10 + \sin 2\pi x, \quad f(x) = \cos 2\pi x.$$

VII.13. Построить алгоритм метода пристрелки для вычисления решений следующих нелинейных задач

а) $\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0, \ y(1) = 2 \end{cases}$

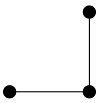
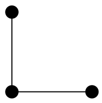
б) $\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0, \ \int_0^1 y(x)dx = 1 \end{cases}$

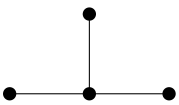
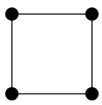
VIII. Эволюционные задачи для уравнений с частными производными

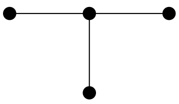
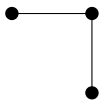
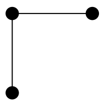
VIII.1. Построить разностные схемы для решения задачи Коши для уравнения переноса

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t), \quad -\infty<x<\infty,\ 0\le t\le T\\&u(x,0)=\psi(x)\end{aligned}$$

Исследовать эти схемы на устойчивость и указать их порядок аппроксимации. Использовать шаблон

а)  б) 

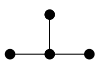
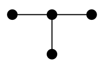
в)  г) 

д)  е)  ж) 

з) Указать единственную (с точностью до способа аппроксимации правой части) схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$, построенную на шаблоне в).

VIII.2. Построить разностные схемы для задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\&u(x,0)=\psi(x)\end{aligned}$$

используя шаблоны  и .

Исследовать полученные схемы на устойчивость

а) по начальным данным;

б) по спектральному признаку, используя принцип замороженных коэффициентов.

VIII.3. Построить явную и неявную разностные схемы для следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + t, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = x, \quad u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 1 + t^2$$

а) Описать алгоритм вычисления решения

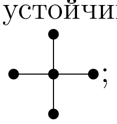
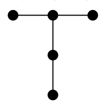
б) Написать программу и осуществить вычисления, используя явную схему. Использовать шаг $h = 0.05$ для сетки по x, шаг по t выбирать из условия устойчивости.

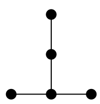
в)* Написать программу и осуществить вычисления, используя неявную схему. Шаг сетки по x положить равным $h = 0.05$, шаг сетки по t положить $\tau = 0.04$.

VIII.4. Построить разностные схемы для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = t, \quad u(1,t) = t^2$$

и исследовать их на устойчивость с помощью спектрального признака

а) по шаблону ; б) по шаблону ;

в) по шаблону .

VIII.5. а) Построить устойчивую и аппроксимирующую разностную схему для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(x,t), \quad -\infty < x < \infty$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = g(x,t), \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = \psi(x),$$

б) Для той же самой системы дифференциальных уравнений рассмотреть смешанную задачу на отрезке $0 \le x \le 1$ при краевых условиях

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = \cos t$$

и построить для нее приемлемую разностную схему.

VIII.6. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,t)$$

построить схему расщепления по направлениям, вывести схему с исключенным промежуточным слоем, исследовать схему на спектральную устойчивость.

VIII.7. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,t)$$

построить разностные схемы метода переменных направлений по следующим образцам

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n} + f \\ \dfrac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{n+1/2} + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n+1} + f \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} \dfrac{u^{*} - u^n}{\tau} = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{*} + \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n} + f \\ \dfrac{u^{n+1} - u^{*}}{\tau} = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n} \end{cases}$$

Исследовать спектральную устойчивость полученных схем.

VIII.8*. Решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T \\ &u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

определяется приближенно по разностной схеме

$$\begin{aligned} &\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} = \frac{y_{m+1}^p - 2u_m^p + u_{m-1}^p}{h^2}, \quad m = 1, 2, \ldots, M-1, \quad Mh = 1 \\ &u_m^0 = \varphi(mh) \\ &u_0^p = u_M^p = 0. \end{aligned}$$

Выписать решение дифференциальной задачи в виде ряда Фурье, а разностной задачи — в виде конечного ряда Фурье. Сравнивая эти ряды, рассмотреть механизм сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной при $\tau = rh^2,\ r \le \frac{1}{2},\ h \to 0$ и механизм расходимости при $r > \frac{1}{2},\ h \to 0$

VIII.9*. Задача Коши

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0,\ -\infty < x < \infty\\ &u(x,0) = e^{i\alpha x}\end{aligned}$$

имеет решение

$$u(x,t) = e^{i\alpha t} e^{i\alpha x}.$$

Аппроксимирующая эту задачу разностная схема

$$\begin{aligned}&\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \quad p = 0, 1, \ldots,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\\ &u_m^0 = e^{i\alpha h m}\end{aligned}$$

имеет решение

$$u_m^p = \left[1 - r + r e^{i\alpha h}\right]^p e^{i\alpha h m},$$

которое при $p = \frac{t}{\tau},\ m = \frac{x}{h}$ стремится к стремится к решению дифференциальной задачи при $h \to 0$ каково бы ни было фиксированное число $r = \frac{\tau}{h}$. Между тем, при $r > 1$ разностная задача не удовлетворяет необходимому для сходимости условию Куранта-Фридрихса-Леви. Объясните кажущийся парадокс.

IX. Задачи для эллиптических уравнений

IX.1. а) Построить пятиточечную разностную схему для задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0$$

б)* Написать программу и вычислить решение разностной задачи методом разделения переменных (методом Фурье).

IX.2. а) Построить пятиточечную разностную схему для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

при следующих краевых условиях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=1} = 0$$

б)* Вычислить решение разностной задачи с помощью метода разделения переменных (метода Фурье).

IX.3. Для краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$
$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0$$

а) Предложить явную разностную схему, основанную на принципе установления.

б) Оптимизировать временной шаг и оценить число итераций, достаточное для уменьшения ошибки начального приближения в тысячу раз.

IX.4. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y), \quad a(x,y) > 0,\ b(x,y) > 0.$$

Составители: В.И.Косарев, О.Л.Косарева, Н.П.Онуфриева, В.Б.Пирогов, В.С.Рябенький, Л.И.Северинов, Л.М.Стрыгина, Р.П.Федоренко, А.С.Холодов, Л.А.Чудов.

Сборник задач для упражнений по курсу:
Основы вычислительной математики