УДК 519.71

Рябых Н.Г.

Московский физико-технический институт

Синтез устойчивых рассинхронизованных итерационных процессов методом пре- и пост-кодирования.

Пусть имеется некоторая система W, состоящая из подсистем $W_1, \dots, W_n$ (рис. 1).

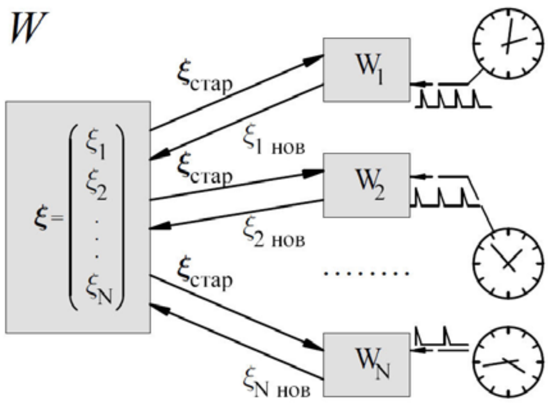

Рис. 1. Рассинхронизованная система.

Тогда в общем виде состояние синхронизованной системы (все компоненты переключаются одновременно) записывается в виде

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n, \tag{1}$$

где x_n, x_{n+1} – векторы состояния системы в моменты времени T_n и T_{n+1} соответственно, A – матрица перехода системы, f_n – вектор внешних воздействий.

Если одновременно переключаются не все компоненты, то динамика системы описывается уравнением

$$x_{n+1} = A_{\omega_n} x_n + f_n, \tag{2}$$

где ω_n - множество номеров переключаемых в момент времени T_n компонент, A – матрица, строки которой с номерами $i \in \omega_n$, совпадают с соответствующими строками матрицы $A = (a_{ij})$, а строки с номерами $i \notin \omega_n$ совпадают со строками единичной матрицы соответствующего размера.

Задача. Может ли асинхронная вычислительная схема (2), отвечающая своему синхронному прообразу (1), сходиться к решению линейного уравнения

$$x = Ax + f$$

при произвольном выборе индексных последовательностей $\{\omega_n\}$.

Ответ на поставленный вопрос в общем случае отрицателен. Вместе с тем существуют, пусть и не очень обширные, классы матриц A, для которых сходимость синхронной процедуры влечет сходимость и ее асинхронного аналога. Так, такие классы образуют симметричные матрицы и матрицы с неотрицательными элементами [1], спектральный радиус которых строго меньше единицы ($\rho(A) < 1$). Таким образом возникает идея некоторым преобразованием привести исходную матрицу A к «хорошему» виду. Это становится теоретически возможным, если воспользоваться предложением Даймонда-Опойцева [2]: *если спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A размерности $n \times n$ строго меньше единицы, то для некоторого натурального N ($N > n$) найдется такая $N \times n$ матрица L и $n \times N$ матрица P, а также $N \times N$ матрица с неотрицательными элементами B, что справедливы следующие соотношения:*

$$LA = BL, \ AP = PB, \ \rho(B) < 1.$$

Результат. Разработан алгоритм работы с синхронным итерационным процессом (1), позволяющий применить асинхронную схему вычислений. Разработана методика получения матриц B, P, L из матрицы A (кодирование), а также обратный переход (декодирование).

Составлена программа на языке C#, иллюстрирующая работу алгоритма на примере матрицы поворота со сжатием (размерность 2×2).

Алгоритм работы с итерационным процессом (1).

1. Подготовка процедуры. Имея матрицу A, спектральный радиус которой строго меньше 1, находятся число N, а также матрицы L, P, B.
2. Пре-кодирование. Для нахождения решения уравнения

   $$x = Ax + f$$

   производится замена переменных $y = Lx$, $\tilde{f} = Lf$ (здесь векторы y и $\tilde{f}$ оказываются принадлежащими пространству достаточно большой размерности $\mathbb{R}^N$).
3. Асинхронные вычисления с кодированными данными. Для построения последовательных приближений рассматривается асинхронная процедура

   $$y_{n+1} = B_{\omega_n} y_n + \widetilde{f_n}.$$

   Эта итерационная процедура в силу построения матрицы B будет сходящейся при любом выборе индексных последовательностей $\{\omega_n\}$ (см. [1]).

4. Пост-кодирование (декодирование). Для нахождения приближений к решению исходного уравнения достаточно произвести замену переменных $x_n = Py_n$.

Результаты работы программы.

Итерационный процесс:

$$x_{n+1} = Ax_n + f_n,$$

где

$$A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 0{,}9; \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Синхронный процесс (одновременный пересчет всех координат) сходится к точке (количество итерация = 1000):

$$x_* = \begin{pmatrix} 0{,}12372 \\ 0{,}41133 \end{pmatrix}.$$

Асинхронный процесс (последовательный пересчет каждой координаты) без кодирования:

$$x_{45} = \begin{pmatrix} -294{,}7804 \\ 253{,}43553 \end{pmatrix}, \quad x_* = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}.$$

Процесс расходится, как и ожидалось.

Асинхронный процесс с кодированием:

$$N = 11$$

B – матрица размерности 11×11.

$$\|B\| = \max_j \sum_i |b_{ij}| = 0{,}94868 < 1$$

Результат после декодирования (количество итераций = 1000):

$$x_* = \begin{pmatrix} 0{,}12372 \\ 0{,}41133 \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем.— М.: Наука, 1992.
2. *Даймонд Ф., Опойцев В. И.* Устойчивость линейных и разностных дифференциальных включений // Автоматика и телемеханика. — 2001. — вып.5. — С.134-139.